現在までの研究

森本　和輝

0.1. **四元数ユニタリ群と GL_2 のテンソル積 L-函数.** 論文 [5] において, 四元数ユニタリ群 G_D と GL_2 のテンソル積 L-函数の積分表示を与えた。ここで、$D = M_2(\mathbb{Q})$ のとき $G_D \simeq \mathrm{GSp}(4)$ となることを注意しておく。この積分表示を用いて次の特殊値の代数性に関する結果を証明した。

Theorem 1 (森本 [5])**.** $D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq M_2(\mathbb{R})$ と仮定しておく。(Π, V_Π) を Π_∞ が *Harish-Chandra* パラメータ $(\ell-1, \ell-2)$ $(\ell > 6)$ である離散系列表現である、$G_D(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約ユニタリ尖点的保型表現とする。(σ, V_σ) を $\sigma_\infty \otimes |\cdot|^{-\frac{u}{2}}$ がウエイト ℓ の正則離散系列となる $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約尖点的保型表現とする。$G(\nu_0)$ を $(\omega_\sigma \cdot \omega_\Pi)^{-1} / |\omega_\sigma \cdot \omega_\Pi|^{-1}$ のガウス和とする. [4] の意味で $\overline{\mathbb{Q}}$ 上 *arithmetic* な $\Phi \in V_\Pi$ と $\Psi \in V_\sigma$、$2 + \frac{u}{2} < m \le \frac{\ell+u}{2} - 1$ を満たす整数 m に対して,

$$A(m, \Pi, \sigma, \Phi, \Psi) := \frac{L(m, \widetilde{\Pi} \times \widetilde{\sigma})}{\left(\sqrt{-1}\right)^{\ell} \pi^{4m-2u} G(\nu_0)^2 \langle \Psi, \Psi \rangle \langle \Phi, \Phi \rangle} \tag{0.1}$$

と置く。ここで、$\widetilde{\Pi}$ と $\widetilde{\sigma}$ はそれぞれ Π と σ の反傾表現。このとき、$A(m, \Pi, \sigma, \Phi, \Psi) \in \overline{\mathbb{Q}}$ であり、任意の $\tau \in \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right)$ に対して、$A(m, \Pi, \sigma, \Phi, \Psi)^\tau = A(m, \Pi^\tau, \sigma^\tau, \Phi^\tau, \Psi^\tau)$ を満たす。

さらに, 系として GSp_4 と G_D の Jacquet-Langlands 対応の存在の仮定の下で、Petersson 内積の商の代数性ついても証明した。この対応は、Arthur の book project において証明されることが期待されている。

0.2. $\mathrm{SO}(V)$ **と** GL_2 **のテンソル積** L**-函数.** 古澤氏との共同研究 [3] において, $\mathbb{R}$ 上 anisotropic な $\mathbb{Q}$ 上の直交空間 V に対して、$\mathrm{SO}(V) \times \mathrm{GL}_2$ の L-函数の特殊値について考察した。

Theorem 2 (古澤ー森本 [3])**.** σ を $\mathrm{SO}(V, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約尖点的保型表現で、無限成分 σ_∞ が自明表現であるものとする。f を重さ k の正則な *new form* とし、 τ を f に付随した $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約尖点的保型表現とする。$n = \dim_{\mathbb{Q}} V$ に対して、$k > 2n$ と仮定する。この時、実素点を含むある素点の有限集合 S で部分 L-函数 $L^S(s, \sigma \otimes \tau)$ が次をみたすものが存在する

$$\frac{L^S(\frac{k-n+1}{2}, \sigma \otimes \tau)}{\pi^{[\frac{n}{2}]\cdot(2k-n)} \langle f, f \rangle^{[\frac{n}{2}]}} \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

$\dim_{\mathbb{Q}} V = 4$ の時 accidental isomorphism により、$\mathrm{SO}(V, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の任意の既約保型表現は $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ と書ける。ここで、D は定値の四元数環、σ_i は $\omega_{\sigma_1}\omega_{\sigma_2} = 1$ を満たす $D^\times(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約保型表現。従って、上記の定理から、Rankin 三重積 L-函数の特殊値の代数性を得る。この結果は “unbalanced” case” つまり $k_1 > k_2 + k_3$ の場合に含まれており、Blasius [1] の Deligne 予想についての計算とも符合する。

0.3. **Shalika periods on** $\mathrm{GU}(2,2)$**.** 古澤氏との共同研究 [2] において, $\mathrm{GU}(2,2)$ の generic な既約尖点的保型表現の twisted exterior square L-函数の積分表示を与え、次の定理を証明した。

Theorem 3 (古澤ー森本 [2])**.** π を $\mathrm{GU}(2,2)(\mathbb{A}_F)$ の既約ユニタリ尖点的保型表現で、中心指標 ω_π が $\omega_\pi|_{\mathbb{A}_F^\times} = \xi^{-2}$ を満たすものとする。この時、次の二つの条件は同値である。

(1) ξ についての *Shalika* 周期は π の表現空間上ゼロでない。.
(2) π は大域的に *generic* で、部分 *twisted exterior square* L-函数 $L^S\left(s, \pi, \wedge_t^2 \otimes \xi\right)$ は $s = 1$ で一位の極を持つ。

References

[1] D. Blasius: Critical values of certain tensor product L-functions. Appendix to T. Orloff, Special values and mixed weight triple products. *Invent. Math.* **90**, 181–188 (1987).
[2] M. Furusawa and K. Morimoto: Shalika periods on $\mathrm{GU}(2,2)$. Accepted for publication in *Proc. Amer. Math. Soc.*
[3] M. Furusawa and K. Morimoto: On special values of certain L-functions. Submitted.
[4] M. Harris: Arithmetic vector bundles and automorphic forms on Shimura varieties. I. *Invent. Math.* **82**, 151–189 (1985).
[5] K. Morimoto: On L-functions for quaternion unitary groups of degree 2 and GL(2) (with an Appendix by M. Furusawa and A. Ichino). Accepted for publication in *Int. Math. Res. Not. IMRN.*