研究計画

室谷文祥

＜3 次元 Euclid 空間における研究＞

種数 1 の n-ノイドについて、そのモジュライ空間を明らかにすることが大きな研究目標である。しかし、トーラスのホモロジー生成元に関する周期問題が障害となり、完全に一般の n-ノイドを考えることは困難である。そこで、これまでの研究結果をふまえ、面対称性と特定のエンド配置をもつ n-エンド・カテノイドを研究対象とする。面対称性により、定義域は長方形トーラスかひし形トーラスに限定される。この条件のもと、次の 2 つの研究課題を考える。

（研究課題 1）n-ノイドのモジュライ空間を調べる上で重要な具体例の構成

正 n 角柱の対称性をもつ n-エンド・カテノイドを考える。このとき、対称性により、隣り合うエンドのなす角は $360° \times k/n$ (k と n は互いに素な自然数, $k \leqq n-1$) となる。私は、最近の研究において、“長方形トーラス上定義された、正 n 角柱の対称性をもつ n-エンド・カテノイドが存在するための必要十分条件は、隣り合うエンドのなす角が $180°$ 未満となることである” ことを示した。この結果は、R. Schoen 氏の研究結果に含まれる、“種数 1 のカテノイドは存在しない” という主張を、“隣り合うエンドのなす角” に着目し、一般化したものと考えることができる。また、各 k, n に対し、このような n-エンド・カテノイドが一意であることも示された。これを踏まえ、ひし形トーラス上定義された、正 n 角柱の対称性をもつ n-エンド・カテノイドを考える。数値計算によれば、ひし形トーラスにおいては、“隣り合うエンドのなす角が $180°$ 未満” という条件は、存在の必要条件であるが、十分条件ではないようである。これをさらに詳しく研究することを目標とする。

（研究課題 2）n-ノイドのモジュライ空間の境界に関する研究

一般に、n-ノイドの任意の列は、部分列をとれば（分岐をもつ）有限個の全曲率有限な極小曲面の和に収束することが知られている。ここでは特に、n-ノイドの列がもはや 1 つの曲面としては存在できず、複数の極小曲面に分かれることを崩壊と呼ぶことにする。

上述の R. Schoen 氏の結果により、フラックス・データが “種数 1 のカテノイド（2-エンド・カテノイド）” に近づく n-エンド・カテノイドは崩壊する。私は大阪市大・加藤氏との共同研究により、n-エンド・カテノイドの具体例を構成したが、その中で、$\omega = \omega_2$ のクラスに属する 4-エンド・カテノイド、3-エンド・カテノイドは、フラックス・データが “種数 1 のカテノイド” に近づき、崩壊する。まずは、これらの例についてハンドルのフラックス等を評価し、崩壊の様子を具体的に捉えることを目標とする。そして、この研究が順調に進めば、次に、定義域のトーラスが潰れることによって引き起こされる崩壊として、正 N 角柱の対称性をもつ $2N$-エンド・カテノイドの崩壊に関する研究を行う。

＜3 次元 Minkowski 空間における研究＞

3 次元 Minkowski 空間において、今出水氏・加藤氏は、すべてのエンドが位数 2 となる maxface を n-ノイドと定義し、種数 0 の n-ノイドの定式化を行った。そして、その定式化を用いて、エンドの数が 4 個以下の n-ノイドについて、フラックス逆問題を解決した。これをふまえ、次の研究課題を考える。

（研究課題 3）Minkowski 空間における種数 1 の n-ノイドの定式化と具体例

Minkowski 空間における種数 1 の n-ノイドを定式化し、Euclid 空間における種数 1 の n-ノイドとの共通点や違いを明らかにすることを目指す。研究手法として、まずは、加藤氏・梅原氏・山田氏による Euclid 空間における定式化、今出水氏・加藤氏による Minkowski 空間における定式化を踏襲し、楕円関数を使った定式化を試みる。