研究成果

室谷文祥

私は、3 次元 Euclid 空間内の埋め込まれたエンドのみをもつ全曲率有限な完備極小曲面、すなわち n-ノイドについて研究している。ここで、n はエンドの総数である。

＜背景と先行研究＞ まず、学術的背景と先行研究について述べる。

n-ノイドは、Weierstrass 表現公式により、コンパクト Riemann 面上の有理型写像と有理型 1 形式の組で表示される。この組を Weierstrass データという。逆に、Riemann 面上に Weierstrass データを与えたとき、このデータが矛盾なく n-ノイドを定めるための条件は周期条件と呼ばれる。

埋め込まれたエンドにはウェイトが定義され、ウェイトの値が 0 となるものは平面型エンド、ウェイトの値が 0 とならないものはカテノイド型エンドと呼ばれる。特に、すべてのエンドがカテノイド型となる n-ノイドを n-エンド・カテノイドと呼ぶ。

X を n-ノイド、$q_1, \ldots, q_n$ を X のエンド、w_j を q_j のウェイト、G を X の拡張された Gauss 写像とする。このとき、$(w_1, \ldots, w_n)$ と $(G(q_1), \ldots, G(q_n))$ の組は X のフラックス・データと呼ばれ、Gauss の発散公式により、$\sum_{j=1}^{n} w_j G(q_j) = 0$ が従う。逆に、“$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbf{S}^2)^n$ と $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ の組 $(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ を、$\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0$ を満たすように与えたとき、それをフラックス・データとする n-ノイドが存在するか” という問題はフラックス逆問題と呼ばれる。

種数 0 の n-エンド・カテノイドに関するフラックス逆問題は大阪市大・加藤氏、東工大・梅原氏、東工大・山田氏により研究されている。彼らは周期条件をフラックス・データに関する代数方程式系として表示し、ほとんどすべての組 $(\mathbf{v}, \mathbf{a}) \in (\mathbf{S}^2)^n \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})^n$ に対し、それをフラックス・データとする種数 0 の n-エンド・カテノイドが存在すること、さらに generic には高々有限個であることを示した。

＜研究成果の概要＞ 以下、種数 1 の n-ノイドに関する私の研究成果を述べる。

私は、大阪市大・加藤氏との共同研究（研究業績 論文 [1]）において、種数 1 の n-ノイドが、エンドの代表元の総和と、Gauss 写像の重複を込みにした極の代表元の総和の差 ω の値により、大きく 2 つのクラスに分けられることを示した。ここで、必要ならば、定義域のトーラスをなす周期平行四辺形の基本周期 (ω_1, ω_2) を取りかえることにより、それぞれのクラスは $\omega = \omega_2$, $\omega = 0$ と表示される。

（$\omega = \omega_2$ のクラス） 既知の例のうち、Costa 曲面や J. Berglund 氏、W. Rossman 氏によって構成された正 n 角柱の対称性をもつ Jorge–Meeks 型 n-エンド・カテノイド（$n \geqq 3$）など、カテノイド型エンドをもつものはこのクラスに含まれる。我々は [1] において、円環領域上の関数を用いて定式化を行い、周期条件をフラックス・データに関する方程式系として表示した。我々はこの定式化により、このクラスに属する新たな例として、長方形トーラスを定義域とし、正 N 角柱（$N = 2$ の場合は直方体）の対称性をもつ $2N$-エンド・カテノイドの 1 係数族（$N \geqq 2$）、二等辺三角柱の対称性をもつ 3-エンド・カテノイドの異なる 2 つの 1 係数族を構成した。

（$\omega = 0$ のクラス） このクラスに含まれる既知の例として、C. J. Costa 氏によって構成された 4-ノイドなどが挙げられるが、これまでカテノイド型エンドをもつ例は知られていなかった。我々は [2] において、周期平行四辺形上、Weierstrass のゼータ関数を用いて定式化を行い、周期条件をフラックス・データに関する方程式系として表示した。私は被覆空間を考え、これら 2 つのクラスを統一的に扱う手法を発見した。そして、この手法により、カテノイド型エンドをもつ初の非自明な例として、ひし形トーラスを定義域とし、正 N 角柱の対称性をもつ $2N$-エンド・カテノイド（N は 3 以上の奇数）の 1 係数族を構成した。特に、N が 5 以上の奇数の場合、この係数族には異なる 2 つの N-エンド・カテノイドが含まれる。その一方、このクラスには長方形トーラスを定義域とし、面対称性と特定のエンド配置をもつ n-ノイドが存在しないことが示された。