これまでの研究成果

岡崎真也

n 個の円周 $S^1 \cup S^1 \cup \cdots \cup S^1$ の S^3 への埋め込みを絡み目という。S^3 から絡み目の環状近傍を取り除きソリッドトーラスをソリッドトーラスの境界のメリディアンが環状近傍の境界のプリファードロンジチュードにうつるように埋め戻すと 3 次元閉多様体が得られる。この操作を S^3 の絡み目に沿った 0 手術という。任意の向き付け可能な連結 3 次元閉多様体は S^3 内のある絡み目からそれに沿った 0 手術により得られることが知られている。

任意の向き付け可能な 3 次元閉多様体対して種数が等しい 2 つのハンドルボディへの分解が考えられる。このときこれらの 2 つのハンドルボディとその貼り合わせの同相写像の 3 つ組を向き付け可能な 3 次元閉多様体のヘゴード分解という。また任意の向き付け可能な 3 次元閉多様体対してあらゆるヘゴード分解の中でハンドルボディの種数が最小になるものを選び、その種数をヘゴード種数と呼び $g_{\mathrm{H}}(M)$ で表す。

任意の向き付け可能な連結 3 次元閉多様体に対して、0 手術によりそれが得られる絡み目は無限に存在する。河内により任意の向き付け可能な連結 3 次元閉多様体 M に対して、次の 2 つの不変量が定義されている。0 手術により M が得られるあらゆる絡み目の中で橋指数が最小となるものを選び、その橋指数を M の橋種数と呼び $g_{\mathrm{bridge}}(M)$ で表す。また 0 手術により M が得られるあらゆる絡み目の中で組紐指数が最小となるものを選び、その組紐指数を M の組紐種数と呼び $g_{\mathrm{braid}}(M)$ で表す。

これまでの研究の成果の 1 つとして次の式が得られた。

$$g_{\mathrm{H}}(M) \leq g_{\mathrm{bridge}}(M) \leq g_{\mathrm{braid}}(M).$$

またこの式のなかで各々の $\leq$ が $<$ の場合と $=$ の場合の 4 通りの状況が考えられる。これらの 4 通りの条件の各々に対して、それを満たす向き付け可能な連結 3 次元閉多様体の具体例を与えた。このことより上の 3 つの種数は多様体に対する関数と見たときに線形独立になっていることが示せた。これらの成果は既に論文化して Journal of Knot Theory and Its Ramifications に掲載されている。

レンズ空間 $L(p,q)$ に対して橋種数と組紐種数の計算結果が以下のように得られた。偶数 n に対して、

$$g_{\mathrm{bridge}}(L(n,1)) = g_{\mathrm{braid}}(L(n,1)) = 3.$$

奇数 n, m に対して

$$g_{\mathrm{bridge}}(L(nm-1,m)) = g_{\mathrm{braid}}(L(nm-1,m)) = 4.$$

さらに $L(8,3)$ に対して

$$4 \leq g_{\mathrm{bridge}}(L(8,3)) = g_{\mathrm{braid}}(L(8,3)) \leq 5.$$