研究成果

恩田健介

n 次元多様体 M^n 上の擬リーマン計量 g_0, ベクトル場 X, 定数 α が

$$-2\mathrm{Ric}[g_0] = L_X g_0 + \alpha g_0$$

を満たすとき, (M^n, g_0, X, α) をリッチソリトン構造といい, その時の計量 g_0 をリッチソリトンという. 定義から明らかなように, リッチソリトンはアインシュタイン計量の一般化の一つになっている. リッチソリトンはリッチ流方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)_{ij} = -2\mathrm{Ric}[g(t)]_{ij}$$

の微分同相とスケーリングによって変形する解であることが知られている.

一般にリッチソリトンを求める問題は, 二階の偏微分方程式を解く問題となる. しかし, 等質多様体上のリッチソリトンは, 代数方程式で求められる Algebraic soliton と関係が深いことが Laruret(2001) の研究で示された. Algebraic soliton は次のように定義される.

$M = G/H$ を等質多様体とし, g を左不変 擬リーマン計量とする. リー環の微分 $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ と定数 c, リッチ作用素 Rc, 射影 $pr : \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ が次の方程式

$$Rc = cI + pr(D)$$

を満たす時, 左不変擬リーマン計量 g を algebraic Ricci soliton という.

Lauret は等質多様体上の非自明な algebraic Ricci soliton はリッチソリトンであることを示した. この結果により, 代数方程式の解である algebraic Ricci soliton を利用して等質多様体上のリッチソリトンを求めることが可能となった.

Lauret による研究はリーマン幾何の範囲での研究であったが, 私はこの研究を擬リーマン幾何の範囲に拡張した ([3]). そして, 私は H_3, $E(2)$, $E(1,1)$, H_N, $G_m(\lambda)$ 上の Lorentzian algebraic Ricci solitons を構成した. H_3, $E(2)$, $E(1,1)$, H_N 上の algebraic Ricci soliton は shrinking, $G_m(\lambda)$ 上の algebraic Ricci soliton は steady であり, これはリーマン計量の範囲では存在しない例である. [4] は Wafaa Batat との共著である. three-dimensional unimodular Lie groups と non-symmetric non-unimodular Lie groups 上の Lorentzian algebraic Ricci soliton の完全な分類を行った. ここで得られた非自明な algebraic Ricci soliton は全て solvsoliton であった. さらに, $SL(2,R)$ 上の左不変ローレンツ計量で Ricci soliton であるが algebraic Ricci soliton でない計量があることを示した. [5] では, four-dimensional pseudo-Riemannian generalized symmetric space 上の algebraic Ricci soliton の分類を行った. [6] は Phillip E. Parker との共著である. H-type の Lorentizian 版を考え, その上での algebraic Ricci soliton の許容条件を研究した. [7] では, second-order symmetric 4-dimensional spacetime 上の幾何を考え, 特に Ricci soliton と Yamabe soliton について研究した.