今後の研究計画

大田武志

2010 年に、糸山・大田は、Selberg 型 β-変形行列模型というものを導入しました。これは、行列のサイズを N としたときに、有限で任意の N において、計算可能という著しい性質をもつ模型です。この計算には、Jack 対称多項式とその性質が重要な役割を果たしています。最近、糸山・大田・吉岡は、この模型やそれに関連した模型の解析を行っています。引き続いて、その研究を行っていく予定です。

これまでに行列模型は、弦理論やゲージ理論の発展において、重要な役割を果たしてきています。行列のサイズ N が無限大の極限においてあらわれるゲージ理論と行列模型の対応は、その一例としてあげることができます。

Alday-Gaiotto-立川予想とよばれる、4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論と 2 次元の共形場理論の対応に触発されて、ゲージ理論/行列模型対応が再び脚光を浴びました。

0 次元行列模型を媒介にして、ゲージ理論/共形場理論対応を眺めようという流れのなかで、われわれは、Selberg 型行列模型を導入しました。もともとの模型は、ゲージ理論が $SU(2)$ で、含まれる物質場の数が $N_F=4$ の場合でしたが、さまざまな拡張がこれまでに行われてきました。たとえば、対応するゲージ理論のゲージ群を $SU(N)$ に拡張したり、q-変形版の模型が提案されたりしています。

当面の研究計画として、とくに、q-変形した Selberg 型 β-変形行列模型とそのさまざまな性質の解明を目指したいと考えています。q-変形は、模型に余分なもう一つのパラメータを導入します。Selberg 型行列模型の観点から述べると、これは、1 パラメータをもつ Jack 多項式を 2 パラメータをもつ Macdonald 多項式へ拡張することに相当します。また対応するゲージ理論の観点からは、5 次元のゲージ理論への持ち上げに相当していると考えられています。

q-変形版の模型において、そのさまざまな極限を解析することによって、新たな形のゲージ理論/共形場理論対応が理解できると面白いと考えています。ゲージ理論/共形場理論対応の別の形の拡張として、ゲージ理論の背景時空を平坦な 4 次元ユークリッド空間から非自明なものに置き換えたり、共形場理論が超対称性を持つ場合にするなどのことが行われてきています。これらと対応する行列模型が考察できないかということもまた面白い研究課題だと思います。

これらの Selberg 型行列模型の拡張に加えて、ひきつづき未解決な問題の一つとして、行列模型の展開基底の問題も研究していきたいと思います。もともとの模型において、Jack 多項式を展開基底として重要な量を計算できることを明らかにしました。しかし、ゲージ理論の Nekrasov 分配関数との対応を考えると、Jack 多項式はよい展開基底となっていません。正体のよくわからない非斉次対称多項式が基底となります。Nekrasov 分配関数の展開と密接に関連したこの非斉次対称多項式の特徴づけを行列模型の立場から明らかにできると、とても面白いと考えています。