

今後の研究計画

「これまでの研究経過」で述べた、非相対論的な無限ボソン粒子系におけるハミルトニアンの特値解析を引き続き行い、漸近完全性を証明する。考察している量子系は、準古典極限において非線形シュレーディンガー方程式（以下 NLS）によって記述される古典場の理論に近似される事が知られている。NLS の理論においても散乱行列なるものが考察出来る（ただし、その存在は数学的には自明でない）が、これが元の量子系に散乱行列の準古典極限となっている事を証明する。更に、BEC 状態にある原子集団に光を照射した際に生ずる、超放射と呼ばれる散乱現象を数学的に考察する。具体的には、以下の3段階で研究を遂行する；

1. ハミルトニアンの漸近完全性 散乱状態においては、時間が十分経てば、素粒子達はいくつかの塊（クラスター）を形成しながら散乱していく事が期待される。これは数学的には、粒子間の相対距離を表す物理量のハイゼンベルグ作用素の漸近挙動を解析する事によってなされる。まず、一定以上の速度を持った粒子の存在確率は時刻無限大で漸近的に0となる事を証明する (Large velocity estimate)。次に、各クラスターは古典力学の自由運動に沿って動く事を証明する (Phase space propagation estimate)。最後に、固有状態においては粒子間の相対距離は小さい事を示す (Minimal velocity estimate)。この最後の評価式から、漸近完全性が成り立つ事が知られているが、技術的に最も困難な箇所である。そこで、「これまでの研究経過」で得た結果 (1-b) と Higher order estimate を併せる事で Minimal velocity estimate を導く。

2. 準古典解析 本研究で考察している量子系は、形式的には、ド・ブローイ場と呼ばれる古典場の理論を量子化したものとして捉える事が出来る。古典場の方程式は、NLS であり、理論物理学の文脈ではこの方程式を解析し数値計算を行う事によって研究が推進されている。この数値計算の結果が純粋数学の観点からも正当化される事を目的として、考察している量子系の準古典解析を行う。有限自由度の量子論における準古典解析は、超局所解析や調和解析といった分野に大きな進展をもたらした。これらの無限次元空間版がどの様になるかというのは純粋数学的にも興味のある所であり、本研究はそれへの応用も見据えたものとなっている。まず、古典場に相当する NLS の解から生成されるフォック空間上のヴァイル作用素を考察する。これは物理的には量子系におけるコヒーレントな状態への射影である。次に、このヴァイル作用素と時間発展のユニタリ作用素の積が準古典極限において NLS の波動作用素となっている事を証明する。以上の事実と 1. で得た結果を用いて、散乱行列の準古典極限が NLS のそれとなっている事を証明する。

3. BEC 上の超放射 ボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) とは、ある一定以下の温度では、マクロな数の原子が基底状態に落ち込む（凝縮）現象であり、量子的な現象を目で見る事が出来る為、工学的にも様々な応用が検討されている分野である。ド・ブローイの物質波-光は粒子とみなす事が出来る様に粒子もまた波動的な性質を持つ-の観点からは、BEC 状態の原子は一つの定在波とみなす事が出来る。BEC 状態にレーザー光を照射すると、回数を重ねる毎にしたがって散乱される光子数が増大していく。これはレーザー光の照射によって BEC がある種のグレーティング（回折格子）を形成する事によって生ずる散乱現象であり、超放射と呼ばれる。この現象を数理物理の観点から考察する事を目的として、本研究を行う。まず、光と非相対論的なボソン粒子が相互作用する、フォック空間上のハミルトニアンを定義する。次に、この作用素の以下で述べる基本的な性質を解析する；ハミルトニアンの自己共役性、基底状態の存在、連続スペクトルの分布。次に、この系における散乱理論を考察し、漸近完全性が成り立つ事を示す。

これらの研究は数学的には未開拓の部分も多く、物理学における直観的な議論が不可欠である。そこで、全国で開催される数学の研究集会に加えて、国内や世界各地で開催される物理の研究集会に積極的に参加し、講演者や参加者達と積極的に議論を行う。