これまでの研究経過

0. 研究背景 申請者はこれまで, **量子多体問題に関する散乱理論**を研究してきた. 散乱理論とは, 多数の素粒子が互いに相互作用をしながら運動する時, その系の長時間挙動を解析する分野のことである. 系の運動は, 素粒子が非相対論的である場合, シュレーディンガー方程式, によって記述される. 系の長時間後の挙動は, 数学的には, **方程式の解の時刻無限大での漸近挙動を解析する**事によってなされる. 多体シュレーディンガー方程式の解は, ハミルトニアンと呼ばれる自己共役作用素の生成するユニタリ群によって表示する事が出来る. 従って, ハミルトニアンのスペクトル（固有値）を解析する事で, 系の漸近挙動を調べる事が出来る. しかしながら, ハミルトニアンの作用するヒルベルト空間は無限次元であり, スペクトルは一般に連続的に分布する為, 緻密な解析が必要とされる. 素粒子が**有限個ある系**における散乱理論は, これまでに多くの研究がなされてきた. 一方物性物理学の分野では, 近年素粒子が**無限個ある系**での現象が活発に研究されており, 特にボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) は 1995 年に実験で確認されて以来, 理論的な研究も活発に行われている.. このような無限自由度の系における散乱理論を数学的に厳密に扱う為には量子場の理論を用いた枠組みを必要とする. だが, これまでの所先行研究は殆どなされていない状況にあった.

1. 研究内容と得られた結果 そこで, 申請者は**場の量子論に置ける散乱理論の数学的研究**を行った. 散乱理論では, 実験前の系の状態を実験後のそれに対応させる写像-散乱行列と呼ばれるユニタリ作用素-が最も物理的に重要な量である. 散乱行列の存在は, 数学的には漸近完全性と呼ばれる事実から導出される事が知られている. しかしながら, 漸近完全性を示す事は容易ではなく, 考察する系のハミルトニアンに関する緻密なスペクトル解析が必要となる. そこで, 申請者は, **非相対論的なボソン粒子の無限系におけるハミルトニアンを定義し, そのスペクトル解析を行った.** 得られた結果は, 大きく分けて以下の３つである;

(1-a) 第二量子化作用素に対する極限吸収原理 (論文一覧表の [1]). 場の量子論では, 系の状態は, フォック空間と呼ばれるヒルベルト空間であらわされる. 系の運動エネルギーは, 一粒子のそれを表す自己共役作用素を第二量子化と呼ばれる手続きによって構成した作用素として表される. フォック空間は顕著な代数構造を自然に持っており, 第二量子化作用素は無限次元リー代数の表現論とも密接に関わっている. ハミルトニアンの生成する時間発展群 (シュレーディンガー方程式の解作用素) はレゾルベントと呼ばれる作用素値正則関数の逆ラプラス変換を用いて表示出来る. レゾルベントは実軸上では特異性を持ち, これは, ハミルトニアンのスペクトルが実数値である事に対応する. 実は, 適当に位相を修正した際に実軸を超えて解析接続出来れば, ユニタリ群の時刻無限大での減衰評価を得る事が出来る. この事実を**極限吸収原理**と呼ぶ. 申請者は, 第二量子化作用素の極限吸収原理を物理的に自然と思われる仮定のみから導かれる事を示した. この結果は抽象的な作用素論の枠組みで証明されており, したがって系が相対論的な場合にも応用可能である.

(1-b) ハミルトニアンの真性スペクトルに関する解析 (論文一覧表の [2]). 次に, 現実の粒子間相互作用を考慮したハミルトニアンのスペクトル解析を行った. これは, 上述した第二量子化作用素（自由ハミルトニアン) に摂動を加えたものとして定義される. この作用素は, 有限自由度の系における作用素（シュレーディンガー作用素) の自然な拡張であるが, 摂動項が自由ハミルトニアンに対して特異性を持っており,T.Kato の摂動理論が適用出来ない. 申請者は,higher-order estimates と呼ばれる評価式を示す事でこの困難を克服し, ハミルトニアンの真性スペクトルが半閉区間であり, その中に埋蔵された固有値は離散的に分布する事を示した.

(1-c) ファインマン積分法を用いた跡公式の証明 (論文一覧表の [3]). 量子統計力学では, 物理的に重要な量として分配関数がある. これはハミルトニアンの生成する熱半群のトレースによって表す事が出来る. 申請者は,(1-b) で考察したハミルトニアンに関する熱半群のトレースをファインマン積分として表示した. 更に, このトレースの準古典近似を導いた.