今後の研究計画　（高木　聡）

これまでの研究では、スキームの基礎理論を吟味・発展させた結果、Zariski-Riemann 空間（以下ＺＲ空間）などの極限空間をスキームと共通に扱える環境を整備してきており [3]、かつその結果アラケロフ幾何学に対する応用も見込めるようになってきた [4]。そのことを踏まえた上で、今後は以下のような研究課題がある。

(a) **直線束および平滑性の理論の構築**

ZR 空間上で加群を考える場合、主にベクトル束を中心に考えることになると思われるがこれは最近の K-理論が重要視されることと相まって自然な発想と考えられる。スキームの場合は直線束の性質として豊富、準豊富、ネフ、巨大などの概念が定義されるが、これは（「豊富」を除いて）ZR 空間上の直線束にもそのまま拡張される。ZR 空間上では無限階数の Neron-Severi 群を考えることになるが、これらが代数多様体の場合と同様の理論ができるかどうかは研究する価値がある。

一方で ZR 空間に対して (非) 特異性、あるいはそれに準ずる概念を考えることも重要である。Kontsevich が述べているように、スキームにおける平滑性は無限小変形の持ち上げによって特徴づけられるので、これによって ZR 空間の平滑性を定義することもできる。これは現在でも未解決となっている正標数での特異点解消とかかわりを持つことが期待される。これらはいずれも非ネータ環を扱うことになるので、現在その環論の足固めとなる論文を執筆中である。

(b) **アラケロフ幾何学の基盤の再構築**

[4] で有理整数環の Zariski スペクトラムのアラケロフコンパクト化 $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$ が普遍性で特徴づけられた。これは ZR 空間の一種と見做せる。実際にその上の標準束の振る舞いなどは豊富束よりもネフ巨大束の振る舞いに近い。アラケロフ幾何学はボゴモロフ予想の解決など顕著な応用があるものの、各概念の定義は ad hoc な部分が多く、そのために理論全体の見通しが悪くなっているのは否めない。今回、普遍性により数論的コンパクト化が根拠づけられたので、それを用いて理論全体を見直すことは、他の整数論への応用を考えるうえでも非常に重要である。$\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$ 上の加群はよく知られているようにアーベル圏をなさないが、K 理論の構築は可能である。通常の代数幾何学における曲線上の加群の理論と共通の語彙で Riemann-Roch などの定理を記述するのは統一的理解をする上で非常に重要と思われる。

以上２つの目標は互いに連関しており、ここ数年はこれらを同時並行で進めていきたい。