これまでの研究経過　（高木　聡）

博士課程の間は高次元 Weil-zeta 関数についての研究を進めていた。高次元 Weil-zeta 関数は偏極射影代数多様体上の固定された中間次元の有効サイクルの（各次数における）個数の母関数として定義される。私は、有効サイクルが X に対して余次元 1 の場合については高次元 Weil-Zeta 関数の収束半径が偏極因子の自己交点数によって決まることを示した [1]。

サイクルの余次元が 2 以上の場合にも、いくつかの計算結果からこの収束半径が Néron-Severi 群 (の豊富錐) 上の区分的線形関数を与えることが予想される。すなわち、トロピカル幾何学との関連性が強く示唆されている。

そのため、2010 年度はトロピカル幾何学や、$\mathbb{F}_1$ 上の概型の理論を包含した枠組みの、$\mathscr{A}$-スキームの理論の構築を目指した。2012 年度に理論を扱いやすくするために新たに書き直している [2]。この $\mathscr{A}$-スキームは、乗法モノイドの構造を含む良い性質をもつ代数系 $\mathscr{A}$ (例えば、$\mathscr{A}$ はモノイド、半環、可換環の場合に成立) を固定した場合に、よい性質をもつ $\mathscr{A}$ 付き空間として定義される。この $\mathscr{A}$-スキームは代数系を可換環に限定した場合には従来のスキームとほぼ同様な性質を持つ一方、極限をとることができるという著しい特長を持つ。[3]

例として、Stone-Čech のコンパクト化の手法と同様にして、Zariski-Riemann 空間 (以下 ZR 空間) が $\mathscr{A}$-スキームとして構成できる。また、この ZR 空間を用いることで、永田の埋め込み定理が系として得られる。それ以外にも、有限型でない分離的スキームも $\mathscr{A}$-スキームの圏では ZR 空間に埋め込みが可能である。

これらの幾何学的構成法をさらに推し進めることで、有理整数環 $\mathbb{Z}$ のスペクトラムの数論的コンパクト化 $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ の純代数的構成に成功した [4]。これには Haran などの先行研究があるが、筆者の結果はアルキメデス付値も代数的構造から普遍性により導けているという意味でより優れている。アラケロフ幾何学の各種概念の根拠づけだけでなく、数論の各論において応用が大いに期待される。

参考文献

[1] S. Takagi: *The number of 1-codimensional cycles on projective varieties*, Kyoto J. Math. vol. 50-2 (2010) 247-266

[2] S. Takagi: *Universality of the category of schemes*, Preprint, arXiv: mathAG/1202.5085

[3] S. Takagi: *A-schemes and Zariski-Riemann spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova **127** (2012) 122-177

[4] S. Takagi: *Compactifying* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, Preprint, arXiv: mathAG/1203.4914