

今後の研究計画

筒井容平

1 実解析学の研究

1.1 Weight に関する研究

「これまでの研究成果」の 1.3 で述べた結果は、まだ不十分な部分があるので完成させる。また、その問題は違う A_∞ constant, 例えば Sawyer 型の定数や Nazarov-Petermichl-Volberg の熱核を用いた定数, によりいくつかの Variation が考えられるためそれらについて評価がどうなるか考察する。また、与えられた作用素 T に対して、2つの異なる weight を伴う two weight inequality; $\|Tf\|_{L^q(\sigma)} \lesssim \|f\|_{L^p(w)}$ が成立するための w と σ に対する必要十分条件を見つめる問題にも取り組む。ここまでの研究を見る限り、指数関数も含めて議論できるのではないかと考えているので、この two weight problem を Rychikov による A_p^{loc} class を含む形で考えていきたい。

1.2 Kakeya 予想

全ての方向の単位線分を含む Lebesgue 速度 0 の compact 集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ の Hausdorff 次元 $\dim_{\mathcal{H}} K$ は考えている空間の次元 n と一致するという、Kakeya 予想とその周辺の問題に取り組む。現在では、波動方程式の解の評価、制限問題、Bochner-Riesz problem そして Kakeya maximal operator の有界性の問題と密接な関連があることが知られている。特に、制限問題と Kakeya maximal function conjecture に取り組む。前者の問題は、Schrodinger 方程式における Strichartz 評価 と関連があることから、この研究が下の 2.2 の研究の一つの approach となることを期待している。

2 偏微分方程式の研究

2.1 流体の方程式への重み付き函数空間の応用

これまでに研究では、重み付き Hardy 空間も初期値の条件として用いても、Wiegner の解の減衰の order $(n+2)/4$ には達することができなかったが、今までの考察からおそらく重みのパラメータに関する実補間空間を用いれば Wiegner の order $(n+2)/4$ で減衰する energy を持つ解を作ることができると予想されるので、これを実行する。また、その critical な order よりも早く減衰するための必要条件などについて考察する。その他、渦度方程式や Euler 方程式などへの応用も考えていく。

2.2 Schrödinger 発展群による函数空間の特徴付け

問題は Strichartz 評価に対応して、norm $\|f\|_{\dot{S}_{p,q}^\alpha} := \| |t|^\alpha e^{it\Delta} f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|_{L^q(\mathbb{R})}$ などで定まる函数空間 $\dot{S}_{p,q}^\alpha$ の発展群 $S(t)$ を用いない特徴付けである。このような norm は、Cazenave-Weissler, Cazenave-Vega-Vilela らにより、非線形 Schrödinger 方程式の研究において用いられている。彼らの動機は、Besov 空間の heat-semigroup を用いた特徴づけ “ $\|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\alpha}} \approx \sup_{t>0} t^{\alpha/2} \|e^{t\Delta} f\|_{L^p}$, ($\alpha > 0$) ” を応用した Navier-Stokes 方程式 での Cannone や Planchon らによる研究の成功であると思われる。 $S(t)$ に独立な特徴付けを探す直接的な方法と、既存の函数空間 “ Besov 空間, Triebel-Lizorkin 空間, modulation 空間 ” との包含関係を調べる間接的な方法で考えていく。 Strichartz 評価の指数の条件と、擬微分作用素や Fourier 積分作用素などの有界性の議論で現れる指数の条件は良く似ているので、このような作用素による特徴付けが可能ではないかと考えている。

2.3 Hyperbolic-Parabolic 型 走化性方程式

走化性現象を記述する Keller-Segel model の特別な場合の方程式を考える。粘菌などの細胞密度 u と走化性を誘発する化学物質の密度 v に関する方程式であるが、扱う場合の一番の特徴は v に関して拡散項が無いことである。この方程式に簡単な変換を用いて得られる Hyperbolic-Parabolic 型方程式を類似性のある Transport - Diffusion 方程式の手法などを用いながら解析していきたい。