

学術論文のリスト

1. T. Kajigaya, *Second variational formula and the stability of Legendrian minimal submanifolds in Sasakian manifolds*, Tohoku Math. J. **65**, 523–543 (2013).
2. 梶ヶ谷徹, 佐々木多様体の中のルジヤンドル極小部分多様体と安定性, 数理解析研究所講究録, 数理解析研究所講究録 1775, 52-65, 2012.
3. T. Kajigaya, *On the minimality of normal bundles in tangent bundles over the complex space forms*, Proceedings of the workshop on Differential Geometry of Submanifolds and its related topics Saga, August 4-6, 2012, pp. 243–255.
4. T. Kajigaya, *Hamiltonian minimality of normal bundles over the isoparametric submanifolds*, preprint, 19 pages.
5. T. Kajigaya, *On the Hamiltonian minimality of normal bundles*, Proceedings of ICM 2014 Satellite Conference of Real and Complex Submanifolds, accepted.

研究成果

1. 等径部分多様体上の法束のハミルトン極小性 (研究論文 [4])

90年代, Y.-G. Oh は, Kähler 多様体内のラグランジュ部分多様体に対し, そのハミルトン変形と呼ばれる制限付きの変形のもとでの体積変分問題を考察した. 一般にコンパクトサポートを持つハミルトン変形のもとで体積汎関数の第一変分の停留値を与えるラグランジュ部分多様体を H-極小と呼び, 無限小ハミルトン変形のもとで安定になるものを H-安定と呼ぶ. H-極小や H-安定の概念はこれまでの極小や安定の概念を含むより広い概念であるが, $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ や標準的トーラス $T^n \subset \mathbb{C}^n$ などの, 従来の体積変分理論では対象とならなかった基本的な例を含む興味深い対象であることが示された.

複素ユークリッド空間 \mathbb{C}^n 内においては, H-極小ラグランジュ部分多様体の族が多く知られているわけではない. 筆者は, コンパクト半単純 Lie 群 G の Lie 環 \mathfrak{g} 上への随伴作用に関する主軌道 N の法束が接束 $T\mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}^n$ 内の H-極小ラグランジュ部分多様体になることを示し, \mathbb{C}^n 内に新しい非コンパクトな H-極小ラグランジュ部分多様体の族を与えた. このような主軌道 N は, 複素旗多様体あるいは regular Kähler C-space と呼ばれているが, それらは等径部分多様体としても知られている. 筆者はさらに, 等径部分多様体のクラスのうちに, H-極小法束を持つものは, 本質的に regular Kähler C-space に限ることを示した.

2. 法束の極小性と austere 部分多様体 (研究論文 [3])

Harvey-Lawson は, \mathbb{R}^n 内の部分多様体 N の法束が $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{C}^n$ 内で特殊ラグランジュになるための必要十分条件は, N が austere 部分多様体 (すなわち各単位法ベクトルに関する主曲率が -1 倍に関して不変) であることを示した. この観点からして, \mathbb{R}^n 内の austere 部分多様体の構成は重要な問題であるが, 一般の Riemann 多様体内の austere 部分多様体に関しては, Hermite 対称空間などに複数の例が確認されているものの, 幾何学的な解釈や性質, 応用はまだほとんど知られていない.

筆者は, 一般の Riemann 多様体 M 内の部分多様体 N に対し, 「佐々木計量 g_S を伴う接束 TM 内の法束 νN 」を考えることで, νN の極小性と N の austere 性との関連を調べた. ここで, (TM, g_S) には計量と両立する自然な概 Kähler 構造を入れる. このとき, TM に入るシンプレクティック構造は, 余接束 T^*M に入る標準的なシンプレクティック構造と同一視できることに注意する. 主な結果として, (i) 単連結対称空間 M 内の部分多様体 N に対し, その法束 νN が (TM, g_S) 内で全測地的であることは, N が鏡映部分多様体になることと同値である, (ii) M を実空間形とすると, N が M 内の austere 部分多様体であることは, 法束 νN が (TM, g_S) 内で極小ラグランジュ部分多様体になることと同値である, (iii) M を平坦でない複素空間形とすると, N が全測地的部分多様体, 複素部分多様体, 一定の主曲率を持つ austere Hopf 超曲面は極小な法束を持つが, austere 曲面 (極小曲面) であっても, 極小な法束を持たないものが存在する, などを示した.

3. 佐々木多様体内の Legendre 部分多様体の安定性 (研究論文 [1])

Kähler 多様体内の H-極小ラグランジュ部分多様体の類似として, 佐々木多様体内のルジャンドル部分多様体に対して, ルジャンドル変形 (すなわち, ルジャンドルと言う性質を保つ変形) のもとで体積変分の停留値をとる L-極小ルジャンドル部分多様体の概念がある. また, L-安定性の概念も同様に定義される. 佐々木多様体はその Riemann 錐が Kähler 多様体になることにより特徴付けられ, また, 正規佐々木多様体は, ある Kähler 多様体の主 S^1 束であることが知られている. これらのような場合は, L-極小ルジャンドル部分多様体は, 錐や射影を通じて, H-極小性ラグランジュ部分多様体と対応する. 一方, 安定性については, 一般的に対応が存在するとは言えず, ルジャンドル部分多様体固有の問題となる. 実際, 筆者は, L を奇数次元単位球面 $S^{2n+1}(1)$ 内の L-極小ルジャンドル閉部分多様体とすると, L は L-不安定であることを示した. 一方, 球面の場合とは対照的に, ϕ -断面曲率 -7 の佐々木空間形 $SL(2, \mathbb{R})$ 内に, 無数の L-安定な, 極小でない, L-極小閉曲線が存在することを示した.

Results

1. Hamiltonian minimality of normal bundles over the isoparametric submanifolds [4]

In 90's, Y.-G. Oh introduced the notion of *Hamiltonian-minimal* (*H-minimal*) Lagrangian submanifolds in Kähler manifolds. Such a submanifold is a critical point of the volume functional under the Hamiltonian deformation. This is an extension of the notion of *minimal* submanifold, and has been studied by many authors. An H-minimal Lagrangian submanifold is called *Hamiltonian-stable* (*H-stable*) if the second variation is non-negative for any Hamiltonian deformation. Oh studied H-stability of some examples of H-minimal Lagrangian submanifold in a specific Kähler manifold. For example, the real projective space $\mathbb{R}P^n$ in $\mathbb{C}P^n$ and the standard tori in \mathbb{C}^n are H-stable. On the other hand, we know a few family of H-minimal Lagrangian submanifolds in \mathbb{C}^n . We proved that any normal bundle of a principal orbit N of the adjoint representation of a compact semi-simple Lie group G in the Lie algebra \mathfrak{g} is an H-minimal Lagrangian submanifold in the tangent space $T\mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}^n$. These orbits are called the complex flag manifolds or regular Kähler C-space. Moreover, we characterize the regular Kähler C-space by this property in the class of full and irreducible isoparametric submanifolds in \mathbb{R}^n .

2. On the minimality of normal bundles and austere submanifolds [3]

Harvey-Lawson proved that the normal bundle of a submanifold N in \mathbb{R}^n is special Lagrangian of some phase in $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{C}^n$ if and only if N is an austere submanifold, namely, the set of principal curvatures of N is invariant by multiplication by -1 for any unit normal vector. Thus, an construction of austere submanifolds is an important problem in \mathbb{R}^n . However, we know little of properties and applications of austere submanifolds in general Riemannian manifolds. Let N be a submanifold in a Riemannian manifold M . We consider the normal bundle νN in the tangent bundle TM equipped with the Sasaki metric g_S , and investigate the relation of the minimality of νN and the austere condition of N . In (TM, g_S) , there are natural almost complex structure, and the symplectic structure is identified with the standard one on the cotangent bundle T^*M . We prove that (i) When M is a simply connected symmetric space, νN is totally geodesic if and only if N is a reflective submanifold, (ii) When M is a real space form, νN is minimal if and only if N is an austere submanifold, (iii) When M is a non-flat complex space form, the normal bundles of totally geodesic submanifolds, complex submanifolds and austere Hopf hypersurfaces with constant principal curvatures are minimal. However, there exist an austere surface (namely, minimal surface) which does not have minimal normal bundle.

3. Stability of Legendre submanifolds in Sasaki manifolds [1]

There is a notion of *Sasaki manifolds*, which is an odd-dimensional counterpart to Kähler manifolds. In Sasaki manifolds, we consider *Legendrian-minimal* (*L-minimal*) Legendrian submanifolds which correspond to H-minimal Lagrangian manifolds in Kähler manifolds. We also define the notion of Legendrian stability for these submanifolds. The Riemannian cone of a Sasaki manifold is a Kähler cone, and the converse is true. When a Sasaki manifold is regular, it is a principal S^1 -bundle of a Kähler manifold. In these situations, the H-minimality of Lagrangian submanifolds corresponds to the L-minimality of Legendrian submanifolds by taking the cone or the projection. However, there are no correspondence between the H-stability and the L-stability. In fact, we prove that any closed L-minimal Legendrian submanifolds in the odd-dimensional unit sphere is L-unstable. In contrast to this situation, we give examples of L-stable closed curves in $SL(2, \mathbb{R})$ which is the Sasakian space form with constant ϕ -sectional curvature -7 .

研究計画

1. Kähler 多様体内の等質ラグランジュ部分多様体の分類とハミルトン安定性

Kähler 多様体内の等質ラグランジュ部分多様体の分類問題はシンプレクティック幾何学, 微分幾何学の両者の立場からして, 興味深く重要な問題である. 例えば, コンパクト等質ラグランジュ部分多様体は必然的にハミルトン極小 (H-極小) であり, そのハミルトン安定性は, 調和解析を用いて詳しく調べられる. 最近, モーメント写像を用いて, Bedulli-Gori らが複素射影空間 CP^n 内の, Ma-Ohnita らが複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ 内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体を分類し, Ma-Ohnita らはさらにそのハミルトン安定性を決定した. CP^n に埋め込まれた極小ラグランジュ部分多様体は常にハミルトン安定か? という Oh や Ohnita の問題を考える上でも, Bedulli-Gori らの分類をもとに, それらのハミルトン安定性を決定することは重要であると考えている.

一方, ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 内の, 等質な極小部分多様体は全測地的 (すなわち, アファイン平面) に限ることが知られている [Di Scala 2002]. また, 平行な平均曲率ベクトルを持つ等質部分多様体は本質的に, 球面内に含まれることが知られている [Olmos 1994]. Olmos の結果を H-極小の場合に考えることは, \mathbb{C}^n 内の H-極小ラグランジュ部分多様体を分類する上で重要であると考えている. 実際, C-space の法束を考えることにより, 余等質性が 1 以上の H-極小ラグランジュ部分多様体が存在することが分かっている.

また, 既に得た \mathbb{C}^n 内の H-極小ラグランジュ部分多様体の法束による構成方法において, コンパクト半単純 Lie 群の特異軌道 (あるいは, 一般化された旗多様体) の法束の H-極小性や, C-space の法束のハミルトン安定性, マスロフ類を調べたい.

2. タイトなラグランジュ部分多様体の分類問題

Kähler 多様体 M 内のラグランジュ部分多様体 L が (大域的に) タイトとは, L と gL が横断的に交わる等長変換群の任意の元 g に対し, $\#L \cap gL = SB(L, \mathbb{Z}_2)$ となることを言う. ここで, $SB(L, \mathbb{Z}_2)$ は L のベッチ数の和を表す. Y. G. Oh は複素射影空間 CP^n 内で (大域的) タイトな埋め込まれた閉ラグランジュ部分多様体は全測地的な実射影空間 RP^n に限ることを示し, より一般にコンパクト型 Herimite 対称空間内のタイトラグランジュ部分多様体の分類問題を提起した. 例えば, 田中-田崎の結果により, コンパクト型 Hermite 対称空間内の実形はタイトラグランジュ部分多様体になることが知られている. また, Gorodski-Podesta の一般化により, 一般化された旗多様体内のタイトラグランジュ部分多様体は, 旗多様体のユークリッド空間内への随伴表現による標準的な埋め込みを介して, ユークリッド空間内への tight または taut な immersion と密接に関係していることが分かる. tight immersion に関する Kuiper らの理論を用いることにより, タイトラグランジュ部分多様体の分類を目指したい.

Plan of study

1. Classification of homogeneous Lagrangian submanifolds in Kähler manifolds and the H-stability.

It is an important problem in symplectic geometry and differential geometry to classify homogeneous Lagrangian submanifolds in Kähler manifolds. For instance, any compact homogeneous Lagrangian submanifold is H-minimal, and the Hamiltonian stability is investigated by the harmonic analysis. Recently, Bedulli-Gori classified all compact homogeneous Lagrangian submanifolds in $\mathbb{C}P^n$, and Ma-Ohnita done in $Q_n(\mathbb{C})$ by using the moment maps. Moreover, Ma-Ohnita decided the H-stability of these submanifolds in $Q_n(\mathbb{C})$. When the case of $\mathbb{C}P^n$, Oh and Ohnita posed the problem: "Is any embedded compact minimal Lagrangian submanifold in $\mathbb{C}P^n$ H-stable?" To consider this problem, we want to investigate the H-stability of the homogeneous Lagrangian submanifolds in $\mathbb{C}P^n$.

It is known that a homogeneous minimal submanifold in \mathbb{R}^n is totally geodesic, namely, it is an affine plane [Di Scara 2002]. Moreover, any homogeneous submanifold \mathbb{R}^n with parallel mean curvature vector is essentially contained in a sphere [Olmos 1994]. To classify the homogeneous H-minimal Lagrangian submanifolds in \mathbb{C}^n , we want to extend Olmos's result to H-minimal Lagrangians. Note that we have already constructed an H-minimal Lagrangian submanifold in \mathbb{C}^n with cohomogeneity which is greater or equal to 1 as a normal bundle of a C-space.

We want to consider the H-minimality of a singular orbit of the adjoint orbit of a compact semi-simple Lie group (namely, a generalized flag manifold). We also consider the H-stability and the Maslov class of normal bundles of C-spaces.

2. Classification of tight Lagrangian submanifolds

A Lagrangian submanifold L in a Kähler manifold M is called (globally) tight if it satisfies $\#L \cap gL = SB(L, \mathbb{Z}_2)$ for any isometry g of M such that L transversally intersects with gL , where $SB(L, \mathbb{Z}_2)$ is the sum of Betti number of L . Y. G. Oh proved that the closed, embedded, (globally) tight Lagrangian submanifold in $\mathbb{C}P^n$ is only the totally geodesic $\mathbb{R}P^n$, and posed the classification problem of tight Lagrangian submanifolds in compact Hermitian symmetric spaces. For example, Tanaka-Tasaki proved that real forms in a compact Hermitian symmetric space are globally tight. On the other hand, due to the results of Gorodski-Podesta, we know that the tightness of Lagrangian submanifold is closely related to the notion of tight or taut immersions into Euclidean space. By using results in the theory of tight immersions, we want to classify the tight Lagrangian submanifolds in a specific Kähler manifold.