研究成果

1. 等径部分多様体上の法束のハミルトン極小性 (研究論文 [4])

    90 年代, Y.-G.Oh は, Kähler 多様体内のラグランジュ部分多様体に対し, そのハミルトン変形と呼ばれる制限付きの変形のもとでの体積変分問題を考察した. 一般にコンパクトサポートを持つハミルトン変形のもとで体積汎関数の第一変分の停留値を与えるラグランジュ部分多様体を H-極小と呼び, 無限小ハミルトン変形のもとで安定になるものを H-安定と呼ぶ. H-極小や H-安定の概念はこれまでの極小や安定の概念を含むより広い概念であるが, $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ や標準的トーラス $T^n \subset \mathbb{C}^n$ などの, 従来の体積変分理論では対象とならなかった基本的な例を含む興味深い対象であることが示された.

    複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ 内においては, H-極小ラグランジュ部分多様体の族が多く知られているわけではない. 筆者は, コンパクト半単純 Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ 上への随伴作用に関する主軌道 N の法束が接束 $T\mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}^n$ 内の H-極小ラグランジュ部分多様体になることを示し, $\mathbb{C}^n$ 内に新しい非コンパクトな H-極小ラグランジュ部分多様体の族を与えた. このような主軌道 N は, 複素旗多様体あるいは C-sapce と呼ばれているが, それらは等径部分多様体としても知られている. 筆者はさらに, 等径部分多様体のクラスのうちで, H-極小法束を持つものは, 本質的に C-space に限ることを示した.

2. 法束の極小性と austere 部分多様体 (研究論文 [3])

    Harvey-Lawson は, $\mathbb{R}^n$ 内の部分多様体 N の法束が $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{C}^n$ 内で特殊ラグランジュになるための必要十分条件は, N が autere 部分多様体 (すなわち各単位法ベクトルに関する主曲率が -1 倍に関して不変) であることを示した. この観点からして, $\mathbb{R}^n$ 内の austere 部分多様体の構成は重要な問題であるが, 一般の Riemann 多様体内の austere 部分多様体に関しては, Hermite 対称空間などに複数の例が確認されているものの, 幾何学的な解釈や性質, 応用はまだほとんど知られていない.

    筆者は, 一般の Riemann 多様体 M 内の部分多様体 N に対し, 「佐々木計量 g_S を伴う接束 TM 内の法束 νN」を考えることで, νN の極小性と N の austere 性との関連を調べた. ここで, (TM, g_S) には計量と両立する自然な概 Kähler 構造を入れる. このとき, TM に入るシンプレクティック構造は, 余接束 T^*M に入る標準的なシンプレクティック構造と同一視できることに注意する. 主な結果として, (i) 単連結対称空間 M 内の部分多様体 N に対し, その法束 νN が (TM, g_S) 内で全測地的であることは, N が鏡映部分多様体になることと同値である, (ii) M を実空間形とすると, N が M 内の austere 部分多様体であることは, 法束 νN が (TM, g_S) 内で極小ラグランジュ部分多様体になることと同値である, (iii) M を平坦でない複素空間形とすると, N が全測地的部分多様体, 複素部分多様体, 一定の主曲率を持つ austere Hopf 超曲面は極小な法束を持つが, austere 曲面 (極小曲面) であっても, 極小な法束を持たないものが存在する, などを示した.

3. 佐々木多様体内の Legendre 部分多様体の安定性 (研究論文 [1])

    Kähler 多様体内の H-極小ラグランジュ部分多様体の類似として, 佐々木多様体内のルジャンドル部分多様体に対して, ルジャンドル変形 (すなわち, ルジャンドルと言う性質を保つ変形) のもとで体積変分の停留値をとる L-極小ルジャンドル部分多様体の概念がある. また, L-安定性の概念も同様に定義される. 佐々木多様体はその Riemann 錐が Kähler 多様体になることにより特徴付けられ, また, 正規佐々木多様体は, ある Kähler 多様体の主 S^1 束であることが知られている. これらのような場合は, L-極小ルジャンドル部分多様体は, 錐や射影を通じて, H-極小性ラグランジュ部分多様体と対応する. 一方, 安定性については, 一般的に対応が存在するとは言えず, ルジャンドル部分多様体固有の問題となる. 実際, 筆者は, L を奇数次元単位球面 $S^{2n+1}(1)$ 内の L-極小ルジャンドル閉部分多様体とすると, L は L-不安定であることを示した. 一方, 球面の場合とは対照的に, ϕ-断面曲率 -7 の佐々木空間形 $SL(2, \mathbb{R})$ 内に, 無数の L-安定な, 極小でない, L-極小閉曲線が存在することを示した.