# 研究業績

## 1 低次元実リー群上の左不変平坦な射影構造・アファイン構造の存在・非存在問題

多様体上の射影構造とは線形接続の射影同値類であり，線形接続が射影平坦とは捩れのない平坦な線形接続と局所的に射影同値なときを言う．又多様体への群の作用が射影構造を保つとき不変であると言う．不変平坦な射影構造をもつ等質空間は，接続の観点からして局所的に射影空間に近い等質空間だと言える．また捩れのない平坦な線形接続を平坦なアファイン構造とも呼ぶ．平坦な射影構造・アファイン構造の存在・非存在問題に関しては多くの先行研究があるが，まだ多くのリー群に関してこの問題は未知である．論文では５次元以下の実リー群に対し，これら幾何構造の存在・非存在を決定した．

## 2 複素リー群上の不変平坦な複素射影構造と概均質ベクトル空間

左不変平坦な実射影構造を許容する実単純リー群が阿賀岡芳夫氏・浦川肇氏・Albert Elduque 氏により分類されている．更に不変平坦な実射影構造を許容する単純でない半単純リー群の例はほとんど知られていない．これに対しこの論文により平坦な実射影構造を許容する単純でない半単純リー群の無限系列を構成することができた．この系列は特殊線形群の直積から成り、その組み合わせも自明ではない。例えば SL(2) の 2 つの直積は不変平坦な射影構造を許容しないことを以前示したが、SL(2) と SL(3) の直積上には不変平坦な射影構造が存在する．

先行研究は実射影構造を扱うが，この論文では複素射影構造を考える．論文ではまず射影カルタン接続を用いることで複素リー群上の不変平坦な複素射影構造と概均質ベクトル空間の微分との対応を示した．そして佐藤幹夫氏・木村達雄氏による既約な概均質ベクトル空間の分類理論を用いて，既約で不変平坦な複素射影構造を許容する複素リー群の分類を行うことができた．この分類において実形を取ると平坦な実射影構造を許容する無限個の単純でない半単純実リー群が新たに得られる．

## 3 射影構造の裏返し変換

この論文では概均質ベクトル空間の分類で重要な裏返し変換を基にして，射影構造を伴う多様体の変換 “射影構造の裏返し変換” を完成させた．一般に平坦な射影構造の存在に関しても多くが未知である．例えば平坦な射影構造をもつ多様体 2 つの直積は平坦な射影構造を持つとは限らない．実際球面はこの性質を持つ．これに対しこの裏返し変換により平坦な射影構造を伴う多様体 $M$ が与えられれば、その射影枠束上に平坦な射影構造の存在することが新たに分かった．ここで射影線形群自体は平坦な射影構造を持つので，射影枠束は局所的には射影平坦な 2 つの多様体の直積の構造を持つことに注意する．更に裏返し変換を続けることで射影平坦な $M$ 上の主ファイバー束の系列が得られ、各主ファイバー束は平坦なグラスマン構造を伴う多様体で結ばれる。それら主ファイバー束の構造群は射影線形群の直積であり、その組み合わせはあるグラスマン型の整数係数 2 次方程式の正数解によって与えられる．

## 4 $SL(n,\boldsymbol{R})$ と $SL(n,\boldsymbol{H})$ の射影平坦な放物型部分代数

どのようなリー群上に不変平坦な射影構造とアファイン構造が存在するかについてまだ多くが未知である。これら幾何構造の構成について、部分多様体の観点から研究した。複素半単純リー代数のボレル部分代数上には平坦な複素アファイン構造が存在すること

が Y.Takemoto 氏、S.Yamaguchi 氏により知られている。ここからすぐに実半単純リー環の岩沢分解に伴う可解部分代数 $\mathfrak{s}$ 上には平坦なアファイン接続 $\nabla$ が存在することが分かる。そして放物型部分代数の Langlands 分解に伴う可解部分代数 $\mathfrak{s}'$ 上には $(s, \nabla)$ から平坦なアファイン接続が誘導されることが示される。また平坦な射影構造を許容する実単純リー群のリー環は $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})$ と $\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{H})$ のみであることが知られている (阿賀岡、浦川、Elduque)。これらのリー環とその射影平坦な線形接続は任意の放物型部分代数 $\mathfrak{q}$ 上に射影平坦な接続を誘導することが分かる。このとき $\mathfrak{q}$ 上の射影平坦な接続が平坦なアファイン接続と射影同値になるための必要十分条件が特殊線形リー環のディンキン図式のどの点を採用するかどうかという仕方で記述される。