今後の研究計画

申請者は, これまでの研究成果において述べた様に, 優線形楕円型方程式に興味を持ち, 特にその解の構造と定義領域の関連に関する研究を行ってきた. 今後はまず, 今までの研究の継続として, 測地球 $B_{\theta_0} \subset \mathbf{S}^N$ 上で定義された問題

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{S}^N} u + \lambda u + |u|^{p-1}u = 0 & \text{in } B_{\theta_0}, \\ u + \kappa \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial B_{\theta_0}, \end{cases}$$

に対して, 一般の $N \geq 3$ の場合における解構造の研究を行う. これは $N = 2$ の結果を高次元の場合に拡張することを目的としているが, この場合は $N = 2$ の場合と異なり, $u \equiv 0$ の周りにおける線形化問題

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{S}^N} w + \lambda w = 0 & \text{in } B_{\theta_0}, \\ w + \kappa \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial B_{\theta_0}, \end{cases} \tag{1}$$

の固有値の多重度が高々2 とはならない. したがって, $N = 2$ の議論をそのまま適用することは出来ず, 非球対称解を含めて議論する為にはより一般の次元に対する解の構成法を考える必要がある.

また, $N = 2$ の場合において構成した解は (1) の固有値から分岐する局所分岐解であり, その大域的な性質についてはまだ何も知られていない. したがって分岐解の大域的性質に関して研究する予定であるが, このような大域分岐の研究に関しては例えばユークリッド空間上の球 $B = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| < 1\}$ 上で定義された問題

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda(-u + u^p) = 0 & \text{in } B, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } B, \end{cases}$$

に対する, 東京大学の宮本安人准教授による大域分岐構造の結果 (例えば, [1]) がある. 申請者はその手法を測地球上で定義された方程式へと応用することで解析を行う事を予定している. しかし次元 N が十分大きく, かつ指数 p も十分大きい場合には [1] においても大域構造が不明瞭な部分があるので, その点も踏まえて, 大域分岐の研究において別のアプローチを開拓する必要性も考慮している. また, 宮本准教授も測地球上の優線形楕円型方程式の解構造に対して興味を持っており, この問題に関して, 今後の共同研究の可能性も視野に入れた上で議論を行っている.

加えて申請者は, 多様体上における解構造のより包括的な解明を目指している. そのために, 今までの研究では単位球面 $\mathbf{S}^N$ 上で考えてきた問題を, 回転体上において定義し, その解構造を解明することを計画している. 回転体上で定義された問題は $\mathbf{S}^N$ 上で定義された問題の一般化と考えられ, その為この研究によって, 球面上で定義された優線形楕円型方程式の解構造がより包括的な視点から理解されることが期待される.

また, 申請者の受入研究者である高橋太教授は非線形楕円型方程式に関して研究を行い, 多くの結果を得ている. したがって高橋教授と議論を行うことは申請者自身の研究の発展に繋がると期待しており, 共同研究も行いたいと考えている.

References

[1] Y. Miyamoto, Structure of the positive radial solutions for the supercritical Neumann problem $\epsilon^2 \Delta u - u + u^p = 0$ in a ball, UTMS Preprint Series 2013.