これまでの研究成果のまとめ

申請者は大学院における研究活動を通して, 優線形楕円型方程式に興味を持ち, その解の性質を調べる研究を行ってきた. この方程式は非線形シュレディンガー方程式の定在波解や, 数理生物学における走化性モデルの定常状態等, 様々な現象モデルとして現れるものであり, また, 関連するエネルギー汎関数は変分問題の観点から研究されている.

申請者は博士課程においてまず, 一般にスカラーフィールド型方程式と呼ばれる

$$\begin{cases} \epsilon^2 \Delta u - u + f(u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

に対して研究をおこなった. ここで, Ω は N 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ の有界領域であり, その境界 $\partial\Omega$ はなめらかである. 問題 (1) は, $u \to \infty$ のとき $f(u) = O(u^p)$ $(p > 1)$ という条件下において多くの結果が報告されている.

一方, 申請者は (1) に対して $u \to \infty$ のとき $f(u) = O(e^u)$ という条件を課し, その場合にも, ベキ乗型非線型項の場合と同様の結果が得られることを証明した (ただし $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ とする). すなわち, (1) は関連するエネルギー汎関数の正値最小エネルギーを達成するような正値古典解 u_ϵ をもち, 更に十分小さい $\epsilon > 0$ に対して u_ϵ はただ一つの最大点 P_ϵ を持つ. そして $\epsilon \to 0$ としたとき, P_ϵ は境界 $\partial\Omega$ から最も離れた点に漸近する, ということを証明した.

さらに次の問題

$$\Delta w - w + f(w) = 0 \qquad \text{in } \mathbf{R}^2 \tag{2}$$

が $w(y) \to 0$ $(|y| \to \infty)$ となる一意な正値解 w を持つ, という条件下では, $\epsilon > 0$ が十分小さいときの $u_\epsilon(x)$ の最大点周囲における形状は $w((x - P_\epsilon)/\epsilon)$ を用いて近似されることも証明した. これはやはりべき乗型非線形項の場合にも知られていたことであるが, 先行研究においてはこの問題に対して解 w の非退化性という条件を過程していたのに対して, 申請者は, w の一意性及び f に対する他の条件から w の非退化性が導かれることを証明し, その結果を用いて解の形状に関する上記の結果を得た (実際, 一意性から非退化性が導かれるという結果は, f が指数型の場合だけでなく, ベキ乗型である場合にも正しい).

その後申請者は, 楕円型方程式の解集合の構造が領域の幾何学的形状の影響を大きく受けるという点に特に興味を持ち, ユークリッド空間ではなく多様体上で定義された方程式の解集合の構造を調べる研究に着手した. 具体的には, N 次元単位球面 $\mathbf{S}^N (N \geq 2)$ 上の測地球上で定義された問題

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{S}^N} u + \lambda u + |u|^{p-1} u = 0 & \text{in } B_{\theta_0}, \\ u + \kappa \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial B_{\theta_0}, \end{cases} \tag{3}$$

の解構造を調べた. ここで $\mathbf{S}^N$ は N 次元単位球, $\Delta_{\mathbf{S}^N}$ は $\mathbf{S}^N$ 上のラプラス・ベルトラミ作用素, $B_{\theta_0} \subset \mathbf{S}^N$ は北極点 $(0, 0, ..., 0, 1) \in \mathbf{R}^{N+1}$ を原点とし, 測地半径 $\theta_0 \in (0, \pi)$ の測地球である. また, n は境界 ∂B_{θ_0} 上の外向き単位法線ベクトルである.

問題 (3) に対しては $N = 3$, $p = 5$, $\lambda = 0$, $\kappa = 0$ の場合には, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ である場合にのみ一意な正値 “球対称” 古典解が存在することが知られていた (ここでいう “球対称” とは北極点からの測地距離にのみ依存する, という意味). 申請者はその結果を $\kappa > 0$ の場合に拡張し, 解の存在する κ, θ_0 の範囲を完全に解明した. 特に, $\kappa > 0$ の場合には十分小さい $\theta_0 > 0$ に対しても正値球対称古典解が存在することが示されたが, これは $\kappa = 0$ の場合と大きく異なるものである.

また, (3) に対しては今まで正値球対称解に関する結果しか報告されていなかった. このことに対して申請者は, $N = 2$, $1 < p < \infty$, $\kappa = 0$, $\lambda \geq 0$ であり, 更に θ_0 が十分 π に近い場合に対して正値球対称解以外の解を構成した. 具体的にはまず, (3) を $u \equiv 0$ の周りで線形化した方程式の固有値の多重度に関して, θ_0 が十分 π に近い場合には固有値の多重度が 1 あるいは 2 であることを証明した. そしてその結果を下に, Lyapunov–Schcmidt の reduction method によって非正値の解や非球対称の解を, 線形化方程式の固有値から分岐する解として構成した.