研究計画 真瀬真樹子

Bimodular 特異点 $B = (0, f)$, $B' = (0, f')$ が strange-dual なペアであるとし, それぞれのコンパクト化を F, F' とする. 植田氏との共同研究の結果によって Δ と Δ' の極双対 Δ'^* が一致するような多面体 Δ, Δ' が得られた. 多面体 Δ, Δ' に付随する $K3$ 曲面の族を $\mathcal{F}_\Delta$, $\mathcal{F}_{\Delta'}$ とする. 以下の問題を考える.

問題 1 族の Picard 格子 $\mathrm{Pic}(\mathcal{F}_\Delta)$, $\mathrm{Pic}(\mathcal{F}_{\Delta'})$ を決定せよ.

問題 2 族 $\mathcal{F}_\Delta$ の Picard 格子と族 $\mathcal{F}_{\Delta'}$ の超越格子を比べよ. この 2 族は Dolgachev の意味でミラーペアか.

問題 1, 2 へは, Belcastro による, トーリック超曲面の族の一般元の Picard 格子の計算方法が適用される.

射影平面の 6 次曲線で分岐する 2 重被覆から得られる $K3$ 曲面を double sextic $K3$ 曲面と呼ぶ. $\mathcal{DS}$ を double sextic $K3$ 曲面 の族とする.

問題 3 $\mathcal{DS}$ の部分族を全て分類し, 各部分族の Picard 格子を決定せよ.

族 $\mathcal{DS}$ の $K3$ 曲面の部分族を分類することは重み $(1, 1, 1, 3)$ の重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$ の Newton 多面体 $\Delta_{(1,1,1,3;6)}$ に含まれる reflexive 多面体を分類することと同等である. 何故ならば, $f_d(x, y, z)$ を x, y, z に関する d 次式を表すことにすると, double sextic $K3$ 曲面の定義方程式は $w^2 = f_6(x, y, z)$ となるので, $K3$ 曲面は重み $(1, 1, 1, 3)$ の重み付き 6 次曲面と自然に同一視できるからである. Picard 格子の決定に関しては問題 1 で用いた方法が適用されると考えられる.

問題 4 $\mathcal{DS}$ の各 double sextic $K3$ 曲面の部分族について Batyrev の意味でのミラーペア族を決定せよ. それらはまた $\mathcal{DS}$ の中の double sextic $K3$ 曲面の部分族になるか?

問題 5 $\mathcal{DS}$ の各 double sextic $K3$ 曲面の部分族の一般元に対して分岐曲線を記述せよ. どの部分族の一般元が楕円ファイバーの構造を持っているか?

問題 4 は定義に従って極双対多面体の計算が必要となる. 問題 5 は double sextic $K3$ 曲面のモジュライ空間に関する Horikawa の結果と Comparin-Garbagnati による 2 次の楕円 $K3$ 曲面の結果をトーリック多様体の言葉に翻訳した結果が得られると予想される. 更に, 次の問題が考えられる.

問題 6 S と $\hat{S}$ を double sextic $K3$ 曲面であって楕円ファイバー構造を持つとする. S と $\hat{S}$ が Batyrev の意味でミラーペアのとき, S と $\hat{S}$ の特異ファイバーの間に何らかの関係はあるか.