これからの研究計画

岡崎真也

レンズ空間の橋種数と組紐種数

研究成果でも述べたが、現在レンズ空間の橋種数と組紐種数を計算している。既に得られた結果ではレンズ空間 $L(p,q)$ に対して $\frac{p}{q}$ の偶数による連分数展開の長さの最小値に 2 を加えたものと橋種数と組紐種数が一致している。全ての絡み目に対して同じ性質が成り立つのかを考察したい。これまでの研究成果の 1 つとして次の式が示せている。任意の向き付け可能連結閉 3 次元多様体 M に対して

$$g_{\mathrm{H}}(M) \leq g_{\mathrm{bridge}}(M) \leq g_{\mathrm{braid}}(M).$$

ここで $g_{\mathrm{H}}(M)$ は M のヘゴード種数である。もし上の性質が成り立つのであればレンズ空間のヘゴード種数が 1 であることからヘゴード種数と橋種数の差がいくらでも大きい例が存在するということを証明できる。既に全てのレンズ空間に対して上からの評価はできているので下からの評価を行いたい。

レンズ空間が 0 手術により得られるような絡み目の成分数は 3 以上である。まずは 3 成分の純組紐で 0 手術により得られるようなレンズ空間について考えたい。もし $\frac{p}{q}$ の偶数による連分数展開の長さの最小値とレンズ空間 $L(p,q)$ の橋種数と組紐種数が一致しているのであれば、このようなレンズ空間は $L(2n,1)$ に限られるはずである。

ザイフェルト多様体の橋種数と組紐種数

またザイフェルト多様体の橋種数や組紐種数についても考察したい。2 次元球面を底空間とするザイフェルト多様体でその表示が特異ファイバーが全て偶数で表されるものについてはレンズ空間と同じ議論で橋種数と組紐種数が上から評価できる。河内-田山-Burton による 3 次元多様体のテーブルの中にザイフェルト多様体はたくさん現れているが、3 成分の純組紐で表されているザイフェルト多様体は 2 成分の絡み目による 0 手術で得られないなら橋種数と組紐数は 3 である。これらを元に橋種数と組紐種数が 3 であるザイフェルト多様体の特徴づけを行いたい。

またこのテーブルの表記法により 1^{2n} で表されるザイフェルト多様体は $SFS[S^2:(2,1)(2n+1,n)(4n+2,-4n-1)]$ であり、$1^{2n},-2,1^2,-2$ で表されるザイフェルト多様体が $SFS[S^2:(2,1)(2n+1,n)(2n+2,-2n-1)]$ であることが Kirby 変形を用いた Kaplan による構成法を応用することで得られている。どちらもザイフェルト多様体の特異ファイバーの間のフルツイストと 0 手術による組紐表示のフルツイストの間の対応が見えていて興味深い。