【これまでの研究成果】

調和写像論，及び可積分系理論を用いた特殊ラグランジュ部分多様体の考察，というのが現在までの研究テーマである．特殊ラグランジュ部分多様体とはカラビ-ヤウ多様体の実部分多様体であって，キャリブレーションとよばれる，全空間に付随するある種の微分形式を用いて定義されるものである．また同時に，特殊ラグランジュ部分多様体はカラビ-ヤウ多様体の極小ラグランジュ部分多様体であるという側面ももつ．これは，特殊ラグランジュ部分多様体を様々な観点から考察し得ることを示唆する．

特殊ラグランジュ部分多様体と可積分系との関わりは，カラビ-ヤウ多様体を３次元複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^3$ とする場合にみることができる (D. Joyce, *Special Lagrangian 3-folds and integrable systems*, 2008).

$\mathbb{C}^3$ の特殊ラグランジュ部分多様体 (より正確には $\mathbb{C}^3$ の特殊ラグランジュ錐，すなわち原点に特異点をもち得る錐状の特殊ラグランジュ部分多様体) はリーマン面から２次元複素射影空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ への極小ラグランジュはめ込みを導出する．また反対に，リーマン面 S から $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ への極小ラグランジュはめ込み $\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ が与えられたとき，対応して $\mathbb{C}^3$ の特殊ラグランジュ錐 (はめ込まれた部分多様体として) が構成される．

そこで申請者は，一般化されたワイエルシュトラス型表現公式とよばれる調和写像の構成法 (J. Dorfmeister, F. pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, 1998) を用いて，リーマン面 S から調和写像 $\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ を構成し，それが極小ラグランジュはめ込みになる条件を明らかにした．以下，S をリーマン面とする．より具体的に述べると，上述の構成法では，あるクラスの S 上行列値１形式を初期値とし，それに対して S から対称空間への調和写像が構成される．前研究では，同構成法を通して得られる調和写像 $\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ が，さらに極小ラグランジュはめ込みとなるような初期値 (S 上行列値１形式) の形を定めた．これは同時に，$\mathbb{C}^3$ の特殊ラグランジュ錐を構成する条件を与えたことを意味する．

調和写像 $\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ と，代表的な可積分系の一つである戸田格子方程式系の解は，互いに対応関係をもつ (J. Bolton, F. Pedit and L. M. Woodward, *Minimal surfaces and the affine Toda field model*, 1995)．調和写像 $\psi : S \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ がさらに極小ラグランジュである場合，対応する戸田格子方程式系の解はティツェイカ方程式の解へ簡約化されることが知られており，加えてその解が S の複素座標 z の偏角に依らない場合にはパンルヴェ III 型方程式の解へと簡約化される．この点に着目し，前研究に於いては一般化されたワイエルシュトラス型表現公式を通して，偏角不変なティツェイカ方程式の解に対応する $\mathbb{C}$ 上行列値１形式の例を与え，パンルヴェ III 型方程式の解 $w : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ をある程度明示的に得た．パンルヴェ III 型方程式の解は一般に極をもつ一方，ここで得た解は $(0, +\infty)$ 上極をもたないという点で興味深い．

また，上述の結果を踏まえ，他の状況下で上述の結果の類推が成り立つかどうかということを，酒井高司氏 (首都大学東京) との共同研究として現在考察している．橋本要氏 (大阪市立大学) と酒井氏は $\mathbb{C}^{n+1}$ の超曲面として定義される複素錐 Q_0^n にカラビ-ヤウ構造が入ることを示したが (K. Hashimoto and T. Sakai, *Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere*, 2012)，これに対して上記の結果の類推が成り立つことが期待される．