今後の研究計画

カンドルは絡み目の彩色数を一般化した概念で、主に４次元絡み目の幾何構造の研究に使用されている。本年は、カンドルの代数的性質を調べ、独自の結果を導きたい。カンドルの定義は次の通りである：

集合 X と X 上の２項演算 $*$ が次の３つの条件を満たすとき、$(X,*)$ をカンドルという。(1) 任意の $x \in X$ に対し $x * x = x$ が成立する。(2) 任意の $x, y \in X$ に対し、$z \in X$ で $z * y = x$ を満たすものが唯一つ存在する。この z を $x \bar{*} y$ と書く。(3) 任意の $x, y, z \in X$ に対し、$(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ が成立する。（便宜上 $*$ を $*^{+1}$ と、$\bar{*}$ を $*^{-1}$ と書くこともある）

[1] の第８章を読んだのみだが、興味をそそられ多くの問題が見つかっている。それらのうちのいくつかを下に書き出したい。

問題１. カンドル X とその部分カンドル Y, Z に対して、$X = Y \cup Z,\ Y \cap Z = \emptyset$ かつ $y * z = y,\ z * y = z\ (\forall y \in Y,\ \forall z \in Z)$ となるとき、$X = Y \oplus Z$ と書くことにする。また、カンドル X が $X = Y \oplus Z$ と分解できないとき、X は素であると言うことにする。

上の取り決めのもとに、任意のカンドル X は $X = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ (X_λ は素) と一意的に分解されることを示せ。

問題２. カンドル X の部分カンドル Y が「$\forall y \in Y,\ \forall x \in X$ に対し $y * x,\ y \bar{*} x \in Y$」を満たすとき、$Y$ を X の正規部分カンドルと言うことにする。このとき、$a, b \in X$ に対し、
$b = (\cdots((a *^{\pm} y_1) *^{\pm} y_2) *^{\pm} \cdots) *^{\pm} y_n \quad (\text{for } \exists\, y_1, \exists y_2, \ldots, \exists y_n \in Y)$ が成立するならば、$a \sim b$ と書くことにする。次の (1),(2) を示せ。
(1) $\sim$ は X における同値関係となる。その商集合を X/Y と書くことにすると、X/Y にはカンドルの構造が入る。
(2) $X = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ のとき (各 X_λ は素でなくてもよい)、
$X/Y = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda/(Y \cap X_\lambda)$ となる。

問題３. カンドル $(X,*)$ とその双対カンドル $(X,\bar{*})$ は常に同型となるか？

これらは、周知の事実と思われるが、最新研究を調べていくうちに、未解決な問題やオリジナルな問題が見つかるはずである。

[1] 鎌田聖一、曲面結び目理論、丸善出版、平成２４年