研究成果

梅本 悠莉子

無限Coxete群の標準的な生成系（Coxeter系）に対するgrowth seriesは有理関数となることがSteinberg[1]により示され、これにより、growth seriesの収束半径の逆数で定義されるgrowth rateは代数的整数となることが知られている。

さらに、双曲空間におけるCoxeter多面体の余次元1の面を含む超平面に関する鏡映変換で生成される群は、双曲Coxeter群と呼ばれる無限Coxeter群であり、そのgrowth rateとして、Salem数、Pisot数、Perron数などの代数的整数が現れることが知られている。以下は、これらの先行研究を基に行ったこれまでの研究成果である。

1. 3次元双曲空間に作用するcofiniteな双曲Coxeter群のgrowth rateについての結果

早稲田大学の小森洋平氏との共同研究[2, 3]において、3次元双曲空間の体積有限かつコンパクトでないCoxeter単体またはCoxeterピラミッドから定まる鏡映群のCoxeter系に対するgrowth rateがPerron数となること、また、そのうちのいくつかはPisot数であることを証明した。主な手法は、Steinbergの公式を用いてgrowth function（有理関数）の計算を行い、その分母多項式の係数に関する共通の特徴を用いて証明する、というものである。

2. 4次元双曲空間に作用するcocompactな双曲Coxeter群のgrowth rateについての結果

2次元と3次元双曲空間におけるcocompactな双曲Coxeter群のCoxeter系に対するgrowth rateがSalem数または2次の代数的整数となる一方で、4次元双曲空間においては一般にはSalem数ではないことが知られている。一方、Salem数の一般化の一種として、j–Salem数（jは1以上の整数）が定義されており、T.ZehrtとC.Zehrtはgrowth functionの分母多項式の根の分布が2–Salem数の最小多項式の根の分布と同一となるようなcocompactな双曲Coxeter群の無限系列を4次元双曲空間のCoxeter garlandsを構成することにより得た。彼らの手法と結果に触発され、[4]において4次元双曲空間のCoxeter dominoesを構成することにより、growth rateが2–Salem数となるcocompactな双曲Coxeter群の無限系列を構成した。このCoxeter dominoesとは、Schlettweinにより求められたコンパクトなtotally truncated Coxeter simplexを有限個用意し、その余次元1の直角面に関して合同な面同士を貼り合わせることにより新たなコンパクトなCoxeter多面体を構成するというものである。また、前述のCoxeter garlandsの無限部分列のgrowth rateが2–Salem数となることも証明した。

References

[1] R. Steinberg, Endomorphisms of linear algebraic groups, Memoirs of the American Mathematical Society **80**, American Mathematical Society, 1968.

[2] Y. Komori, Y. Umemoto, On the growth of hyperbolic 3-dimensional generalized simplex reflection groups, Proc. Japan Acad., 88, Ser. A (2012), pp. 62–65.

[3] Y. Umemoto, The growth rates of non-cocompact 3-dimensional hyperbolic Coxeter tetrahedra and pyramids, proceedings of the 19th ICFIDCAA Hiroshima 2011, Tohoku University Press (2012), pp. 261–268.

[4] Y. Umemoto, The growth function of Coxeter dominoes and 2–Salem numbers, to appear in Algebraic and Geometric Topology.