今後の研究計画

Springer variety のシューベルトカルキュラス

[McMaster 大学の原田芽ぐみ氏と大阪市立大学の堀口達也氏との共同研究]

Springer variety は旗多様体の代数的部分多様体として定義され，幾何学的表現論の舞台として知られる．Springer variety のコホモロジーの環としての構造は，大阪市立大学の谷崎俊之氏（または Procesi）により明らかにされている．

我々は Springer variety のコホモロジー環の理解として，旗多様体のシューベルト類（のいくつか）を制限し，それら同士の積の展開係数を読み取る形で理解すること目指す．前述の通り，コホモロジー環の関係式はよく分かっているので，まずはどのシューベルト類の制限が基底を成すかを調べる．その後それらの間の積の展開係数を計算する．特に，旗多様体の場合によく理解されている次数 2 のクラスを書けたときの展開係数がどうなるかを調べたい．

Hessenberg variety のコホモロジーと対称群の表現

[大阪市立大学の枡田幹也氏，McMaster 大学の原田芽ぐみ氏，大阪市立大学の堀口達也氏との共同研究]

旗多様体の代数的部分集合の中で特に重要なものとして，幾何学的表現論で研究されてきた「Springer variety」や，旗多様体の量子コホモロジー環の研究において現れる「Peterson variety」，ルート系とトーリック幾何の繋がりを提供する「Weyl chamber に付随するトーリック多様体」などがあるが，これらを統一的に記述する空間が Hessenberg variety である．詳細は省くが，A_n 型の場合は行列とある条件を満たす関数 $[n] \to [n]$ の組から定義される．

特に，ジョルダンブロックが一つの冪零行列から定まるものを「regular nilpotent Hessenberg variety」といい，固有値がすべて相異なる対角行列から定まるものを「regular semisimple Hessenberg 多様体」という．これらのコホモロジー環の間には明確な関係があるように見え，それはコホモロジー環への対称群の表現の言葉で述べることが出来ると予想している．この問題を解決したい．

ルート系に付随するトーリック多様体のトポロジー

上記 Hessenberg variety の特別な場合として，Weyl の部屋の集まりの成す扇から定まるトーリック多様体がある．コホモロジー群は Weyl 群の表現を持ち，これは Stembridge らによって調べられている．Losev-Manin により，このトーリック多様体が moduli 空間としての自然な記述を持つことなども分かっている．

ルート系 Φ が与えられたとき，このトーリック多様体 $X(\Phi)$ を構成することができる．今，2 つのルート系 Φ_1, Φ_2 に付随するトーリック多様体 $X(\Phi_1), X(\Phi_2)$ を考えるとき,「この 2 つの空間がホモトピー同値 $X(\Phi_1) \simeq X(\Phi_2)$ ならば Φ_1 と Φ_2 は同じルート系であるか」という問題を解決したい．応募者のこれまでの研究により，ルート系が既約でランクが奇数ならばこの問題は肯定的であることが分かっており，一般のルート系でも正しいと期待される．