

今後の研究計画

綾野孝則

1. telescopic 曲線に対するヤコビの逆問題

X を種数 g の代数曲線、 $du = {}^t(du_1, \dots, du_g)$ を X 上の正則微分形式のなすベクトル空間の基底、 P_0 を X 上の点とする。 $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{2g-1}) \in \mathbb{C}^g$ に対して、

$$\sum_{i=1}^g \int_{P_0}^{P_i} du = \xi$$

を満たす (P_1, \dots, P_g) を ξ を用いて具体的に表示する問題をヤコビの逆問題という。 (n, s) 曲線の場合にはシグマ関数を用いてヤコビの逆問題が解けることが松谷氏らにより示されている [2]。本研究では、より一般の telescopic 曲線の場合にヤコビの逆問題を解くことを検討する。

2. 代数積分の逆関数

X を $y^2 = 4x^{2g+1} + \lambda_{2g}x^{2g} + \dots + \lambda_0$ で定義される超楕円曲線、 $du = {}^t(du_1, \dots, du_g)$ を X 上の正則微分形式のなすベクトル空間の基底とする。 $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{2g-1}) \in \mathbb{C}^g$ に対して、

$$\int_{\infty}^P du = \xi$$

を満たす $P = (x, y) \in X$ を ξ を使って表す問題を考える。この問題は、 $g = 2$ の場合は $x = -\frac{\sigma_3(\xi)}{\sigma_1(\xi)}$ のように超楕円シグマ関数を用いて解くことが出来る。ここで、 $u = {}^t(u_1, u_3, \dots, u_{2g-1})$ に対して、 $\sigma_{i_1, \dots, i_k}(u) = \frac{\partial^k}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}} \sigma(u)$ とした。 $\sigma(u)$ はシグマ関数である。一般の種数の場合は、 $M = \frac{1}{2}(g-2)(g-3)$ としたとき、 $x = -\frac{\sigma_{2g-1, 1^M}(\xi)}{\sigma_{2g-3, 1^M}(\xi)}$ と予想されている [1]。 1^M は 1 が M 個並ぶことを表す。本研究ではこの予想を検討する。また、超楕円を超える曲線についても同様の問題を解くことを検討する。

3. telescopic 曲線のモジュライ空間の次元

telescopic 曲線は、ある条件を満たす自然数列 (a_1, \dots, a_m) から定まる代数曲線の族である。例えば、 $m = 2, a_1 = n, a_2 = s$ ならば、 $y^n = x^s + \sum_{i+j \leq n-s} \lambda_{ij} x^i y^j$ ($\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$) で定まる代数曲線の族になる $((n, s)$ 曲線)。本研究では、telescopic 曲線のモジュライ空間の次元を求める。

4. telescopic であることと gap の最大値が $2g-1$ であることの同値性

互いに素な自然数列 (a_1, \dots, a_m) で生成されるモノイドに含まれない自然数を gap value という。自然数列が telescopic のとき、gap value の最大値は $2g-1$ (g は gap value の個数) になる。本研究では、逆に gap value の最大値が $2g-1$ のとき、自然数列が telescopic かどうかを検討する。三浦曲線は、互いに素な自然数列 (a_1, \dots, a_m) から定まる代数曲線であり、telescopic な自然数列から定まる三浦曲線が telescopic 曲線である。シグマ関数の代数性、加法定理などの証明には全て、gap value の最大値が $2g-1$ であることを本質的に用いており、この同値性を検討することはシグマ関数の理論を telescopic 曲線を超える三浦曲線に拡張できるかどうかを判断する上で重要である。

参考文献

[1] V. Enolski et al., J. Math. Phys. 53, 012504 (2012).

[2] S. Matsutani and E. Previato, J. Math. Soc. Japan, 60 (2008) 1009-1044.