

# これまでの研究成果

綾野孝則

**1. 代数曲線に付随するシグマ関数** ワイエルシュトラスの楕円シグマ関数は Klein により超楕円曲線の場合に一般化された。Klein のシグマ関数はリーマンのテータ関数を少し変形したものであるが、その一番の特徴は代数曲線の定義方程式と直接結びついた代数的性質である。これにより、シグマ関数は可積分系や暗号理論などに重要な応用があることが知られている。例えば、超楕円曲線の場合のヤコビの逆問題は、Klein のシグマ関数の対数微分である  $\wp$  関数により解ける。また、KdV 方程式や sine-Gordon 方程式の解が  $\wp$  関数で書ける。さらに、暗号理論においては、シグマ関数を用いたペアリングの計算方法なども提案されている。近年、Klein のシグマ関数は Buchstaber 氏などにより、 $n, s$  を互いに素な正整数として、定義方程式が  $y^n = x^s + \sum_{i+j+s < ns} \lambda_{ij} x^i y^j$  で表される曲線 ( $(n, s)$  曲線と呼ぶ、超楕円曲線を含む) にまで一般化された [4]。また、中屋敷氏 [6] により、 $(n, s)$  曲線のシグマ関数を prime form を用いて表示する公式が与えられ、シグマ関数が  $(n, s)$  曲線の定義方程式から代数的に決まることが示された。本研究では、三浦氏 [5] により提案された telescopic 曲線 ( $(n, s)$  曲線を含む) にまでシグマ関数を一般化し、そのシグマ関数も同様に定義方程式から代数的に決まることが示した [1]。さらに、 $(n, s)$  曲線の場合の結果を一般化し、telescopic 曲線のシグマ関数の加法公式を示した (中屋敷氏との共同研究)[2]。

**2. ノンパラメトリック回帰の理論的解析** 連続な値をとる確率変数  $X, Y$  の間の関係を  $Y = m(X)$  のように表現し、雑音  $Y - m(X)$  の 2 乗平均が小さくなるように関数  $m$  を定めるという問題を考える (回帰分析)。関数の値  $m(x)$  として、 $X = x$  のもとでの  $Y$  の平均値をとれば、この 2 乗平均誤差が最小になる。データ  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$  から、 $m(x)$  との差の 2 乗平均 (汎化誤差とよばれ、以下では  $R_n$  と記すものとする) が最小になるように関数  $m_n$  を定める。以下では、 $X, Y$  はそれぞれ、 $d$  次元の実数ベクトル、実数の値をとるものとする。データから関数  $m_n$  を求める方法として、ヒストグラム法、カーネル法、 $k$ -NN (nearest neighbor) 法などが知られている。以下では、 $X$  が  $[0, 1]$  の  $d$  次元の一様分布、 $X = x$  のもとでの  $Y$  の分散が有界、 $m$  が  $(p, C)$ -smooth であることを仮定する ( $p$  が大きいほど、関数  $m$  は滑らかになる)。このとき、どのように  $m_n$  を選んでも、誤差  $R_n$  が  $R_n^* := n^{-2p/(2p+d)}$  のある定数倍を下回ることができない (下界) ことが示されている。 $k$ -NN について、 $1 < p \leq 1.5$  および  $p > 1.5, d \geq 2$  のとき、 $R_n$  が  $R_n^*$  のある定数倍以下のレートを実現できるか否かは未解決であった。本研究では、 $k$ -NN 法では最適なレート ( $R_n^*$  の定数倍) を  $1 < p \leq 1.5$  のとき達成でき、 $p > 1.5$  のとき達成できないことを証明した [3]。

## 参考文献

- [1] T. Ayano, Osaka Journal of Mathematics, Vol. 51, No. 2, (2014), 459-481.
- [2] T. Ayano and A. Nakayashiki, SIGMA 9 (2013), 046.
- [3] T. Ayano, Journal of Statistical Planning and Inference, 142, (2012), 2530-2536.
- [4] V.M. Buchstaber, V.Z.Enolski, D.V.Leykin, arXiv:1208.0990.
- [5] S. Miura, Trans. IEICE J81-A (1998), 1398-1421.
- [6] A. Nakayashiki, Asian J. Math. 14 (2010), 175-211.