これまでの研究成果のまとめ

樋ノ上　和貴

私はこれまで超弦理論のコンパクト化において超対称性を保つ場合の内的空間について調べてきた。特に内的空間の次元が 6，7，8 次元の場合の超重力理論の超対称性解について研究してきた。ここで、6 次元多様体では $SU(3)$ 構造が、7 次元多様体では G_2 構造が、8 次元多様体では $Spin(7)$ 構造がそれぞれ重要な役割を果たす。7 次元では、アーベリアンヘテロ型超重力理論に対応する G_2 構造のクラスを導入した。そのクラスは 3 次閉形式のトーション H_7 と完全 Lee 形式 Θ_7 を持つ。それゆえその理論のフラックス H_7 を T_7 と、ディラトン φ_7 を Θ_7 と同一視した。そのクラスは基本 3 形式 Ω とそれに対応する計量 g_7 及び $U(1)$ ゲージ場の強さ F_7 の 3 つ組 (g_7, Ω, F_7) の選び方によって決まる。この理論ではフラックス H_7 と場の強さ F_7 は Bianchi 恒等式 $dH_7 = F_7 \wedge F_7$ を満たす。加えて、F_7 は拡張された自己双対方程式 $*(\Omega \wedge F_7) = F_7$ を満たす。余等質性 1 の多様体 $\boldsymbol{R}_+ \times S^3 \times S^3$ 上のそのクラスを定める方程式は 1 階常微分方程式になる。それを解くことによって、Ricci 平坦計量を与える G_2 方程式の正則解から S^3-bolt 解を与える式を得た。また、$T^{1,1}$-bolt 解を数値的に得ることができた。

8 次元では、アーベリアンヘテロ型超重力理論に対応する $Spin(7)$ 構造を導入した。そのクラスは基本 4 形式 Ψ とそれに対応する計量及び $U(1)$ ゲージ場の強さ F_8 の 3 つ組 (g_8, Ψ, F_8) の選び方によって決まる。3 佐々木構造を持つ多様体 $M_{3-Sasaki}$ との直積 $\boldsymbol{R}_+ \times M_{3-Sasaki}$ を仮定すると、そのクラスを定める方程式は 1 階常微分方程式に簡単化される。その正則解は Ricci 平坦計量を与える $Spin(7)$ 方程式の正則解から得られる。

6 次元では Gibbons–Hawking 計量から得られる 4 次元 Hyper Kahler with torsion 計量を 2 つ重ね合わせることによって、6 次元計量 g_6 を構成した。その 6 次元計量 g_6 と基本 2 形式 κ と複素 $(3,0)$ 形式 Υ は $E_8 \times E_8$ ヘテロ型超重力理論の NS セクターに対応する $SU(3)$ 構造を定める方程式を満たす。但し、Lee 形式 Θ_6 は完全 1 形式で Bismut トーションは閉 3 形式である。その理論のフラックス H_6 を T_6 と、ディラトン φ_6 を Θ_6 と、ゲージ場の強さ F_6 を Hull 接続の曲率 R^- と同一視する。$(g_6, H_6, \varphi_6, F_{6)}$ は 4 つの調和関数 Φ、$\tilde{\Phi}$、ϕ 及び $\tilde{\phi}$ によって決定される。しかし計量が非負でディラトンが実数でなければならないので、$\Phi = \tilde{\Phi} = \phi = \tilde{\phi}$ が要求される。この多様体 (M_6, g_6) が Calabi–Yau with torsion 多様体であり、それ故 (g_6, H_6, φ_6) はその理論の超対称性解となる。E_8 を $SO(10)$ に破る解を得るために、Hull 接続のホロノミーが $SO(6)$ となる解が必要となる。しかし、この解の Hull 接続のホロノミーは $SO(4)$ であった。この計量 g_6 は 4 つの Killing ベクトル $\partial_3, \partial_4, \partial_5$ 及び ∂_6 を持つ。非自明な解を与える ∂_3 及び ∂_5 の方向に T 双対変換を行うことにより、Hull 接続のホロノミーを $SO(6)$ となる超対称性解を構成できた。この解は Cauchy–Riemann 方程式を満たす調和関数のペア (ϕ, ψ) によって決定される。コンパクトな解を得るために、$\phi + \sqrt{-1}\psi$ を Weierstrass の $\wp$ 関数に選んだ。その時この解は特異点がコディメンジョン 1 の超曲面となる解である。