

木村 嘉之

今後の研究計画

✉ ykimura@kurims.kyoto-u.ac.jp

今後の研究計画

コホモロジー的 Hall 代数とその表現論

量子クラスター代数の正值性予想および、関連した量子冪単部分群に関する量子化予想に関連した研究を行う。一般に、量子クラスター代数は、籠とポテンシャルに付随する Ginzburg 次数付き微分代数上の導来圏における Donaldson-Thomas 型不変量の壁超え現象として、量子クラスター指標とよばれる Ginzburg 次数付き微分代数上の導来圏の t 構造の核である Jacobi 代数上の加群の安定枠付きモジュライ空間たちの (重み付き) Serre 多項式の母関数として得られるということが、Kontsevich-Soibelman, Plamondon, 長尾, Efimov らによって、加法圏論化の立場から理解されている。コホモロジー的 Hall 代数 (Cohomological Hall Algebra, CoHA) とは、Kontsevich と Soibelman によって導入された、籠の表現のモジュライスタックの適切なコホモロジー群を基礎とするベクトル空間上に、合成積を定めたものである。特に、籠とポテンシャルの定めるヤコビ代数の表現のモジュライスタック上における消滅サイクル層とよばれる偏屈層を係数とした CoHA は、critical CoHA と呼ばれ、3次元 Calabi-Yau 多様体上の Donaldson-Thomas 不変量と密接に関係する。特に、Donaldson-Thomas 不変量の構成においては、安定枠付き表現のモジュライ空間の消滅サイクル層を係数とするホモロジー群が重要である。故長尾健太郎氏との共同研究において、籠多様体の理論の "3次元化" として、枠付き安定表現のモジュライ空間の消滅サイクル層を係数とするホモロジー群に、critical CoHA の作用を構成し、その構造を研究する。また、3次元のアフィン空間の点の Hilbert 概型の同変ホモロジー群に定まる critical CoHA の作用およびその局所化を解析し、Feigin-Jimbo-Miwa-Mukhin によるトロイダル代数の表現である MacMachon 表現の幾何学的実現を目指す。

籠多様体の一般化

Geiß-Leclerc-Schröer によって、一般の対称化可能 Cartan 行列に対して、経路多元環および前射影多元環の一般化が導入された。従来の対称化可能 Cartan 行列に対して考察される代数が、頂点に対応する斜体や有限次拡大体等を用いることで、代数閉体上は定義されず幾何学的な扱いができなかったのに対して、切頭多項式環上の経路代数を基礎とした理論で、任意の体上定義される。また、一般化された前射影多元環の関係式は、

- Hernandez-Leclerc による untwisted 型量子アフィン代数に付随するクラスター代数の加法的圏論化におけるポテンシャル
- Cecotti-del Zotto による non-simply laced な群をゲージ群とする $4d \mathcal{N} = 2$ 超対称場の理論のポテンシャル

に自然に現れる。また関係式は、切頭多項式環で拡大されたループ群の作用に関する運動量写像とも幾何学的に理解され、従来の籠多様体と確定型有理型接続のモジュライ空間との対応で考えると、不確定型接続のモジュライ空間と強く関連しており、その上での幾何学的表現論を展開することは、今後の大きな問題であると考えられ、標準基底や籠多様体の理論を一般化することを目標とする。