今後の研究計画

申請者は, これまでの研究成果において述べた様に, 優線形楕円型方程式に興味を持ち, 特にその解の構造と定義領域の関連に関する研究を行ってきた. 今後はまず, 今までの研究の継続として, 測地球 $B_{\theta_0} \subset \mathbf{S}^N$ 上で定義された問題

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{S}^N} u + \lambda u + |u|^{p-1}u = 0 & \text{in } B_{\theta_0}, \\ u + \kappa \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial B_{\theta_0}, \end{cases} \tag{1}$$

に対して, 一般の $N \geq 3$ の場合における解構造の研究を行う. これは $N = 2$ の結果を高次元の場合に拡張することを目的としているが, この場合は $N = 2$ の場合と異なり, $u \equiv 0$ の周りにおける線形化問題

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{S}^N} w + \lambda w = 0 & \text{in } B_{\theta_0}, \\ w + \kappa \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial B_{\theta_0}, \end{cases} \tag{2}$$

の固有値の多重度が高々2 とはならない. したがって, $N = 2$ の議論をそのまま適用することは出来ず, 非球対称解を含めて議論する為にはより一般の次元に対する解の構成法を考える必要がある. また, 問題 (1) の分岐点は固有値問題 (2) の固有値である, といったように, 固有値問題 (2) は問題 (1) の局所分岐構造に関する情報を含んでいるが, 問題 (2) の固有値分布に関しては今までのところ, θ_0 が十分 π に近い状況での結果が得られているだけである. したがって, $\theta_0 = \pi$ からの摂動として取り扱えない θ_0 に対する固有値問題 (2) を考察することが, 以後の研究予定の 1 つである.

上記の内容は解の局所分岐構造に着目した問題であるが, 一方で, 解の大域分岐構造に着目した研究も予定している. これまでの研究では, 問題 (1) において $\lambda = 0$, $\kappa = 0$ とした場合の, $p > 1$ における正値球対称解の構造が調べられている (これまでの研究結果で述べたように, $p > (N+2)/(N-2)$ の場合における結果は, 申請者と宮本准教授による新しい結果である). 申請者としては先行の結果を更に発展させ, $\lambda \neq 0$ の場合における解構造, 特に分岐解の大域的構造を解析することを目標としている.

具体的には, $-N(N-2)/4 < \lambda < \lambda_1$ における, 問題 (1) の正値球対称解の構造を考察する予定である. ここで λ_1 は, B_{θ_0} 上で斉次 Dirichlet 境界条件を課した場合の, $-\Delta_{\mathbb{S}^N}$ の第 1 固有値である. また, $-N(N-2)/4$ は $\mathbb{S}^N$ のスカラー曲率と関係がある定数であり,

$$\Delta_{\mathbb{S}^N} u - \frac{N(N-2)}{4} u + |u|^{p-1}u = 0 \qquad \text{on } \mathbb{S}^N$$

は山辺の方程式として知られている (上記問題は正値解を持つ). $\lambda < -N(N-2)/4$ では, 複数個の正値球対称解が存在することが知られている. 一方, $-N(N-2)/4 < \lambda < \lambda_1$ かつ $p = (N+2)/(N-2)$ では高々1 つの正値解しか存在しないことが知られており, したがって $\lambda = -N(N-2)/4$ を境として, 解構造が定性的に変化することがわかる. 申請者としては, $-N(N-2)/4 < \lambda < \lambda_1$ の場合の解構造をより詳しく調べることで, 解構造の質的な変化に対する新たな知見を得ることを目的とする. 特に, $\lambda = -N(N-2)/4$ の周囲での解構造を考察することで, 解構造の変化という問題にアプローチできる, と考えている.

また, 上記の問題とは別に, 混合境界問題に関する調査, および研究を行うことを考えており, このことに関して大阪市立大学の高橋教授と共同研究を行う予定である.