

$K3$ 曲面のうち, double sextic $K3$ は古典的によく知られた例であり, その幾何はよく研究されている. 特に平面曲線の幾何と密接に関係している.

高々, 単純特異点を持つ平面曲線を B とする. 曲線 B で分岐する 2 重被覆 $S \rightarrow \mathbb{P}^2$ はよく知られているように Gorenstein $K3$ 曲面である. 故にその極小モデル \tilde{S} は $K3$ 曲面となる. このようにして得られた曲面 \tilde{S} を double sextic $K3$ と呼ぶ. Double sextic $K3$ 曲面の分岐曲線の特異点は堀川により調べられている. 全ての double sextic $K3$ 曲面からなる族を DS と記す. Double sextic $K3$ 曲面は重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$ の反標準因子と同一視される. また族 DS の部分族は多面体

$$\Delta_{(1,1,1,3;6)} := \text{Conv} \{ (i, j, k, l) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^4 \mid i + j + k + 3l \equiv 0 \pmod{6} \}$$

の反射的な部分多面体 Δ に対応する族 \mathcal{F}_Δ である. Kreuzer と Skarke による分類結果により $\Delta_{(1,1,1,3;6)}$ の反射的な部分多面体の分類と, それぞれの反射的な部分多面体 Δ に対して Batyrev の意味での mirror 多面体 Δ^* を求めることは直接の計算により可能である. しかしながら, mirror 多面体 Δ^* が $\Delta_{(1,1,1,3;6)}$ の部分多面体でないような例がいくつか見つかった. 反射的な多面体 Δ に付随した Picard 格子 $\text{Pic}(\Delta)$ を \mathcal{F}_Δ の Δ -regular な元の極小モデルの Picard 格子として定め, $\text{Pic}(\Delta)$ の $K3$ 格子の中での直交補空間を $T(\Delta)$ と記す.

問題 1 格子の間の同型 $\text{Pic}(\Delta) \simeq T(\Delta^*) \oplus U$ は成り立つか? ここで U は階数 2 の双曲型格子である.

問題 1 では (Batyrev による) 多面体に関する mirror が (Dolgachev による) 格子に関する mirror に延長されるかどうかを問題にしている. 更に Artebani-Boissière-Sarti の研究を動機とする問題を考える:

問題 2 Double sextic $K3$ 曲面を 2-elementary $K3$ 曲面と見なして研究せよ. 特に不変量 (a, r, δ) について調べ, Nikulin による, symplectic 群作用込みの $K3$ 曲面の間の双対性を調べよ.

$K3$ 曲面の部分多様体としては曲線の研究が大変興味深い. 近年では $K3$ 曲面のピリオドの母関数である超幾何関数論の中に現れるミラー予想が研究されてきている. 代数曲線論においては (非特異平面曲線上の) Galois 点の概念が吉原により定義され, 様々な結果が知られている. また, Weierstrass 点も興味深い研究対象である.

非特異平面曲線 C と射影平面上の点 P に対して $\pi_P : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ を P からの C の射影とする. 体の拡大 $k(C)/k(\mathbb{P}^1)$ が Galois であるとき, 点 P は Galois 点と呼ばれる. 種数 2 以上の射影曲線 C' の点 P' は $h^0(C', \mathcal{O}(gP')) \geq 2$ をみたすとき Weierstrass 点と呼ばれる.

問題 3 Double sextic $K3$ 曲面の分岐曲線の Galois/Weierstrass 点の様子を調べよ. 逆に, double sextic $K3$ 曲面の分岐曲線となるためにはどのような Galois/Weierstrass 点を平面曲線は持つべきか? そのような曲線は退化曲線か? 平面 6 次曲線 B, B' の間に双対関係を定義することは可能か? もし可能ならば B, B' でそれぞれ分岐する double sextic $K3$ 曲面 $S_B, S_{B'}$ の間に双対性は伝播されるか?

問題 3 では double sextic $K3$ 曲面の, 部分多様体による特徴付けを問題にしている.