今後の研究計画

中塚　智之

ナヴィエ・ストークス方程式に関するこれまでの研究を通じて私は解の一意性だけでなく可解性や正則性, 漸近挙動などについての知識を得てきた。この研究経験に基づき, 私は今後もナヴィエ・ストークス方程式, 特に2次元外部領域における定常ナヴィエ・ストークス方程式の更なる研究を行っていくことを計画している. 以下ではこれに関する2つの研究課題を簡単に述べる. これら以外にも一階微分が $|x|^{-2}$ という減衰度を持つような安定解の存在といった課題もあり, 2次元外部定常問題は非常に興味深い問題であるが, これに拘りすぎることなく他の2次元・3次元非有界領域での定常問題についても積極的に取り組んでいく. また, 谷内氏らとの非定常ナヴィエ・ストークス方程式に関する共同研究で得た知識を活かして時間周期解の問題など発展的な課題にも挑戦したい.

1. 2次元外部定常問題の Ill-posedness.

ストークスの逆理に代表される特有の困難のために, 2次元外部領域における定常ナヴィエ・ストークス方程式の解析は難問として知られている. 線形近似が一般には有用でないため, 解の挙動の解析においては非線形項の寄与がどれ程のものであるかが重要と思われる. しかし, 無限遠で減衰するような解を考える場合には非線形項の寄与は及ばず, 解が存在するならば特別な compatibility condition が満たされていなければならないと多くの専門家は考えており, 対称性など特別な条件のもとでしかこのような解を得ることは期待できないと思われる. 私はこの予想が真であると実際に示すことを目指しており, この課題に対する第一歩として, Dirichlet 積分有限な解で L^p 空間に属するものが存在したならば, その解は特別な compatibility condition を満たしていることを示す問題に取り組む. 簡単な観察によりこの問題が $p \leq 4$ の場合に肯定的な解答を持つことが判明しており, 解が満たすべき性質の詳細な解析によって, これをより緩やかな減衰を許すクラスである $p > 4$ の場合に拡張することを当面の目標とする.

2. 定常解の漸近挙動.

定常ナヴィエ・ストークス方程式の2次元外部問題の困難は解の無限遠での挙動にあり, Dirichlet 積分有限な解の挙動について判明していることは極めて少ない. Gilbarg-Weinberger 氏らは Dirichlet 積分有限な解 u が無限遠で適当な定数ベクトル u_c に収束することを示したが, u_c が問題において prescribe されたベクトル u_∞ と一致するのかどうかは有名な未解決問題である. 更に, 彼らの証明手法は外力がゼロの場合にしか適用できない. 実際, 速度ベクトル u と圧力 p から成る量 $\Phi := \frac{1}{2}|u|^2 + p$ の満たす2階線形楕円型方程式に最大値原理を適用することが彼らの証明における重要なステップの1つであるが, 外力がゼロでないと楕円型方程式に外力に関連した項が登場してしまい最大値原理を適用することができない. 私は解が無限遠で適当な定数ベクトルに収束するという Gilbarg-Weinberger 氏らの結果を外力がゼロでない場合に拡張することを計画しており, u を係数に持つ一階の項を含んだ上記の2階線形楕円型方程式について適当なクラスのデータが与えられた場合の解の存在とその無限遠での漸近挙動に関する詳細な解析によって上記の困難を克服できることを確認している. この方法によって問題の解決を試みるとともに, 上記の2つのベクトル u_c と u_∞ が一致するかという問題にも取り組んでみたいと考えている.