これまでの研究成果

中塚　智之

1. 研究背景

私は非圧縮粘性流体の運動を記述した非線形偏微分方程式であるナヴィエ・ストークス方程式の解の一意性の研究をこれまで行ってきた. 一般に, 一意性が成り立つには解が適当な意味で小さいことが要求され, 2 つの解が共に小さい場合の一意性は縮小写像の原理を適用できるため特に難しい問題ではないが, 一方の解が小さいとは限らない場合の一意性は容易な問題ではなく先行研究も少ない. 私はこのような 1 つの解のみが小さい場合の一意性を研究し, 3 次元外部領域と 2 次元外部領域での問題それぞれについて以下に述べるような結果を得た. 3 次元と 2 次元どちらの問題においても適当な意味で小さい解の存在は既に知られており, 私の研究によってこれらの解が小さなクラス以外のどのような解のクラスで一意であるのかが明らかになった.

2. 3 次元外部問題の解の一意性 (論文 [1], [2], [4])

非線形偏微分方程式を線形化方程式からの摂動として扱うとき, その非線形性から評価が閉じる関数空間が選び取られるが, 定常ナヴィエ・ストークス方程式をルベーグ空間 L^p で扱おうとすると $p = 3$ でなければならない. 一方, 線形化方程式であるストークス方程式に関し, 3 次元外部領域では $|x|^{-1}$ が解に対し一般に期待できる最良減衰であることと関連して L^3 空間では解を得ることは期待できず, $|x|^{-1}$ を捉える弱 L^3 空間 $L^{3,\infty}$ が線形理論を構築して非線形問題の解を得る為に真に必要となる. 私は可解性と最良減衰を捉えている 2 つの点で重要な $L^{3,\infty}$ のクラスの定常解の一意性を考察し ([1], [2]), 特に論文 [2] において 2 つの解の内の一方が $L^{3,\infty}$ で小さく, 他方が $L^3 + L^\infty$ に属するという若干の正則性を持てば双方が一致することを示した. この付加条件は除去できない特異性 $|x|^{-1}$ よりも僅かに弱い特異性を許すものである. このような 1 つの解にしか正則性を課さない一意性定理は私によって初めて示された. また, 論文 [4] において谷内氏 (信州大学) や Farwig 氏 (TU Darmstadt) らと共に 3 次元外部領域での時間周期解を典型例とするような $L^{3,\infty}$ のクラスの非定常解の一意性を考察し, 論文 [2] とほとんど同様の仮定のもとで解の一意性を示した. この結果は私の定常解についての結果の非定常問題への拡張と言える.

3. 2 次元外部定常問題の対称解の一意性 (論文 [3])

2 次元外部定常問題は 3 次元の問題よりも難しく, 線形近似が有効な解析手段でないことを示唆するストークスの逆理や Dirichlet 積分有限なだけでは解の無限遠での挙動を制御できない等の特有の困難が知られている. こうした困難のために一般的な理論はまだ確立されておらず, 無限遠で減衰するような解の存在は対称性の仮定のもとでしか得られていない. 私は無限遠での挙動を制御できるクラスである適当な対称性を持つ Dirichlet 積分有限な定常解の一意性を考察し, 2 つの解の内の一方が $|x|^{-1}$ 程度で減衰する小さい解であり, 他方がエネルギー不等式を満たすときの双方の一致を示した. 対称流の減衰度 $|x|^{-1}$ はそれが安定となるための臨界減衰度と考えられており, 安定解がいかなるクラスで一意となるのか判明した. 2 次元外部定常問題における一つの解のみが小さい場合の一意性定理はこの結果により初めて与えられた. 更にこの結果の応用として, 先行研究と組み合わせることにより対称解の無限遠での漸近挙動に関する情報を与えることも出来る.