これまでの研究成果のまとめ

大田武志

一般化された Kerr-NUT-de Sitter 時空において、計量のテンソルモードによる線形摂動を、ある特別な条件下で行うと、線形化された Einstein 方程式 (Lichnerowicz 方程式) は、常微分方程式系に変数分離できることを示した (Publication List の論文 [26])。この常微分方程式系には、基底空間の複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 上のゲージ化された Lichnerowicz 演算子の固有値の情報が必要である。2 階のテンソルに対する固有値の形は推測されていたが、その値の範囲が決定されていなかった。$\mathbb{C}P^n$ 上のゲージ化された Lichnerowicz 演算子の固有値とその多重度を、2 階のテンソルの場合に限らず、任意の高階テンソルの場合に完全に決定することができた。

2 次元共形場理論と 4 次元共形場理論のあいだに関連があるだろうという昔からの予想について、最近、Alday-Gaiotto-立川の 3 人によって、AGT 予想という形で新しい光が当てられた。この発展に基づいて、クイバー行列模型の β-変形を考察した。$SU(n)$ 型のクイバー模型の場合に量子スペクトル曲線を導入した。多重 log 型ポテンシャルを持つ行列模型のスペクトル曲線と、$SU(n)$ ゲージ理論で $2n$ 個のフレーバーをもつ理論の Seiberg-Witten 曲線との比較を行った。その結果、行列模型側のパラメータと、ゲージ理論側の質量パラメータとの間の対応を見出すことができた。さらに 2 つの曲線が同型であることを明確にしめした ([27])。

2 次元共形場理論のコンフォーマルブロックの Dotsenko-Fateev 多重積分は、β 変形した行列模型のなかの Selberg 型のものと解釈できるということを見出した。われわれは Jack 対称多項式に付随した積分公式を用いることにより、q-展開係数を計算する手法を確立した。この手法を適用することにより、β 変形した行列模型が、2 次元共形場理論のコンフォーマルブロックと 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称 $SU(2)$ ゲージ理論のフレーバーの数が $N_f=4$ の場合の Nekrasov 分配関数の母関数として利用できることを示した ([28])。

Selberg 型 β 変形用列模型において、対応する Nekrasov 分配関数が $SU(2)$ ゲージ理論のフレーバー数が $N_f=4$ のものから $N_f=3$、そして $N_f=2$ となるようなスケーリング極限を考察した ([29])。

アフィン $A_n^{(1)}$ リー代数に基づく β 変形クイバー行列模型を導入し、その Virasoro 拘束条件を求め、$n=1,2$ の場合により具体的にループ方程式を決定した ([30])。

(W)AGT 予想は、4 次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の分配関数と、Virasoro 対称性や W 対称性をもつ 2 次元理論のコンフォーマルブロックとの間に対応があるという予想である。これまでに、いろいろな場合に確認がなされている。この (W)AGT 予想の「q-変形」版があり、5 次元に「q-もちあげ」したゲージ理論の分配関数と、q-変形した Virasoro/W 対称性の「コンフォーマルブロック」との間に対応がなりたつことを主張している。この q-変形版の (W)AGT 予想から出発して、q を r 次のべき根にもっていく極限をうまくとると、4 次元の A 型の ALE 空間上の超対称ゲージ理論の分配関数と、2 次元超対称 Virasoro 対称性やそれを一般化した対称性を持つ共形場理論のコンフォーマルブロックとの間の対応が自然に、統一的に理解できることを論証した ([32])。また, q-変形 Virasoro 代数や, q-W 代数において, パラメータ q を 1 のベキ根にする極限を考えることによって、パラフェルミオン代数が現れることを示した。([34])。