

研究計画

(1) Virasoro 代数と楕円 Calogero-Sutherland 模型

Calogero-Sutherland 模型が Virasoro 代数の対称性を持つことが知られている。またこの模型の楕円化である楕円 Calogero-Sutherland 模型が存在する。よって、楕円 Calogero-Sutherland 模型はトーラス上の Virasoro 代数の自由場表示と関係があると推測できる。一方で、Langmann は自由場表示の観点から楕円 Calogero-Sutherland 模型について研究している。よって、楕円 Calogero-Sutherland 模型に関するいくつかの結果を、トーラス上の Virasoro 代数の自由場表示の観点から再構成できる可能性がある。

(2) Macdonald 多項式の楕円化

楕円 Ruijsenaars 模型が三角形的に退化したものは Macdonald 多項式によって解くことができるので、楕円 Ruijsenaars 模型の研究は Macdonald 多項式のある楕円化の研究と直結している。Langmann は楕円 Calogero-Sutherland 模型のハミルトニアン kernel function が満たす関数等式を導いている。この関数等式から、 p 微分 (p は楕円のパラメータ) を伴う楕円 Calogero-Sutherland 模型の解を得ることができる。一方、筆者は楕円 Ruijsenaars 作用素の kernel function の満たす関数等式を自由場表示によって導いた。ここで、筆者が導いた関数等式は Langmann が導いていたものの q -変形であることがわかる。よって、楕円 Ruijsenaars 作用素の kernel function の関数等式が Macdonald 多項式の楕円化に関する重要な情報を含んでいるということが考えられる。

(3) Ding-Iohara-Miki 代数の modular double

量子群の modular double とは、ある種の modular 性を備えた代数のことである。例えば $U_q(sl(2, \mathbb{R}))$ の modular double とは、2 つの互いに可換な量子群から成る代数である：

$$U_{q\tilde{q}^{-1}}(sl(2, \mathbb{R})) = U_q(sl(2, \mathbb{R})) \otimes U_{\tilde{q}^{-1}}(sl(2, \mathbb{R})).$$

ここでパラメータ $q \in \mathbb{C}^\times$ とその modular 変換 $\tilde{q} \in \mathbb{C}^\times$ は $q = e^{i\pi b^2}$, $\tilde{q} = e^{-i\pi b^{-2}}$ ($b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) で定義されているとする。 $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ なので、パラメータ q, \tilde{q} は単位円周上に乗っている： $|q| = |\tilde{q}| = 1$ 。また $U_{q\tilde{q}^{-1}}(sl(2, \mathbb{R}))$ の universal R は 2 重サイン関数によって書かれることが知られている。

ここで、Ding-Iohara-Miki 代数の modular double は存在するののかについて考える。筆者は、2 重サイン関数によって定義されるある kernel function から、Ding-Iohara-Miki 代数の modular double の自由場表示が得られることを確かめている。一方で、この 2 重サイン関数によって定義された kernel function は楕円 Ruijsenaars 作用素の kernel function のスケール極限であることが確認できる。これは、Ding-Iohara-Miki 代数の modular double の表現が楕円 Ding-Iohara-Miki 代数の表現と関係を持っている可能性があることを意味している。