これまでの研究成果のまとめ

筆者はこれまで, 楕円 Ding-Iohara-Miki 代数とその周辺についての研究を行ってきた. まず楕円 Ding-Iohara-Miki 代数がどのように現れるのかについて説明する. 1997 年, Ding と Iohara は affine 量子群 $U_q(\widehat{sl_2})$ の一般化である代数を研究し, この代数は Ding-Iohara 代数と呼ばれていた. 2007 年, 三木は $W_{1+\infty}$ 代数のある q-変形を導入し, この代数は Ding-Iohara 代数の構造を持つことがわかった. 以下ではこの Miki の代数を Ding-Iohara-Miki 代数と呼ぶ. 続いて 2009 年, Feigin-Hashizume-Hoshino-Shiraishi-Yanagida は, Macdonald 作用素の自由場表示から Ding-Iohara-Miki 代数が現れることを指摘した. また彼らは, Macdonald 作用素の自由場表示と三角 Feigin-Odesskii 代数を用いて, Macdonald 作用素を含むような 2 つの可換な q-差分作用素の族を構成した. ここで三角 Feigin-Odesskii 代数とは, もともと Feigin と Odesskii によって導入された楕円 Feigin-Odesskii 代数が三角的に退化したものである. 更に, 楕円 Ruijsenaars 作用素という Macdonald 作用素の楕円化が存在することが知られている. Feigin-Hashizume-Hoshino-Shiraishi-Yanagida らは, 楕円 Feigin-Odesskii 代数を用いて, 楕円 Ruijsenaars 作用素を含む可換な q-差分作用素の族を構成することを試みた. しかし, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示に関する問題がいくつか出てきたので, 彼らの試みは完全にうまくいったわけではなかった.

そこで筆者は, 以上の問題を解く上で「Macdonald 作用素の自由場表示はこの作用素の kernel function に基づいている」という事実に注目した. 更に, 小森, 野海, 白石らは楕円 Ruijsenaars 作用素の kernel function を求めていた. よって筆者は, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示は小森, 野海, 白石らの kernel function に基づいているべきだと考えた. 実際に, 楕円 Ruijsenaars 作用素の kernel function から始めることで, 筆者はこの作用素の自由場表示を構成することに成功した. 更には, 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示において用いられるボソンの作用素たちは, Ding-Iohara-Miki 代数の定義関係式を楕円化した関係式を満たすことが明らかとなった. 結果として, Ding-Iohara-Miki 代数の楕円化が得られ, 我々はこれを楕円 Ding-Iohara-Miki 代数と呼ぶ.

$$\begin{tikzcd}
\text{楕円 Ruijsenaars 作用素} \arrow[r, "\text{自由場表示}"] & \textbf{楕円 Ding-Iohara-Miki 代数} \\
\text{Macdonald 作用素} \arrow[u, "\text{楕円化}"'] \arrow[r, "\text{自由場表示}"] & \text{Ding-Iohara-Miki 代数} \arrow[u, "\textbf{楕円化}"']
\end{tikzcd}$$

以上において, 筆者はこれまでになかった新しい自由場表示, またはボソンの作用素を用いている. これらのボソンの作用素は, 楕円のパラメータに対応する formal variable p のベキ展開によって well-definedness が保証されている.

また筆者は, 上で述べた楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示と楕円 Feigin-Odesskii 代数を用いることで, 楕円 Ruijsenaars 作用素を含む 2 つの可換な q-差分作用素の族を構成できることを確かめている.

(三角) Ding-Iohara-Miki 代数は 5 次元版 AGT 予想, 位相的弦理論において用いられる refined topological vertex などの数理物理の対象に応用されている. よって将来, 楕円 Ding-Iohara-Miki 代数が数理物理に新たな潮流を引き起こすということが考えられる.