

現在までの研究経過

田中清喜

私は Bergman 空間論についての研究を行っている. 定義域 Ω 上の Bergman 空間 $L_a^p(\Omega)$ 及び調和 Bergman 空間 $b^p(\Omega)$ は正則関数もしくは調和関数であり, かつルベーク p 乗可積分である関数全体の成す空間である. $p = 2$ のとき, Bergman 空間 (resp. 調和 Bergman 空間) は再生核 Hilbert 空間であることが知られており, その再生核は Bergman kernel (resp. harmonic Bergman kernel) と呼ばれる. 特に Bergman 空間の定義域が球であるとき, Bergman kernel は具体的に知られている. Berger, Coburn, Zhu は定義域が球である Bergman 空間上において Toeplitz 作用素, Hankel 作用素などの作用素に関する研究を進めた.

一方で, 一般の領域に対しては再生核の具体的な表示は得られない. しかし, C. Fefferman は滑らかな境界を持つ pseudo-convex domain 上の Bergman kernel の境界挙動を解析した. “どのような性質を持つ領域を考えた際に Bergman kernel (resp. harmonic Bergman kernel) の挙動, Bergman 空間上の作用素等を調べることができるか” は興味深い問題である.

私は特に滑らかな有界領域上の調和 Bergman 空間について特に作用素論的考察を試み, 以下の結果を得た.

1. アトム分解定理

R. Coifman, R. Rochberg は定義域が球である Bergman 関数に対して, 正規化した harmonic Bergman kernel を用いた級数表示を与えた. この表示はアトム分解と呼ばれる. 私は H. Kang, H. Koo による harmonic Bergman kernel の評価を用いて $p > 1$ の場合に滑らかな有界領域上の調和 Bergman 関数に対してアトム分解定理を与えた [1].

2. Modified harmonic Bergman kernel

harmonic Bergman kernel の代わりに B. R. Choe, H. Koo, H. Yi によって構成された modified harmonic Bergman kernel を用いて $p = 1$ のときの調和 Bergman 関数の級数表示を与えた. また $b^1(\Omega)$ の双対空間と同一視される調和 Bloch 空間に対しても同様の表示定理を得た [2].

応用として Toeplitz operator について考察した. B. R. Choe, Y. Lee, K. Na によって Toeplitz 作用素が有界, コンパクト, Schatten 族に属するための特徴付けが与えられていたが, その結果を拡張することに成功した.

3. Interpolation of harmonic Bergman functions 上の研究 1. と 2. においては l^p から b^p への作用素を調べる研究であった. この研究では, アトム分解から自然に導入される l^p から b^p への作用素について考え, その作用素が全射有界作用素となるための条件を与えた [3].

また, 領域を球としてノルムに球対称な重みを付けた調和ベルグマン空間についても研究を行った. その空間上における Toeplitz 作用素の固有値, averaging function の境界挙動, Berezin 変換の境界挙動によって評価することに成功した [4]. この研究は大阪市立大学の西尾昌治氏との共同研究であり, 論文投稿中である.

References

- [1] K. Tanaka, *Atomic decomposition of harmonic Bergman functions*, Hiroshima Math. J., **42**, Number 2 (2012), 143–160.
- [2] K. Tanaka, *Representation theorem for harmonic Bergman and Bloch functions*, Osaka Journal of Mathematics, Vol.50, No.4 (2013), 947–961.
- [3] K. Tanaka, *Interpolation theorem of the harmonic Bergman functions*, RIMS kokyuroku Bessatsu B43 (2013), 183–191.
- [4] M. Nishio and K. Tanaka, *Harmonic Bergman spaces with radial measure weight on the ball*, submitted.