今後の研究計画

Hessenberg variety の幾何，表現論，可積分系

旗多様体の代数的部分集合の中で特に重要なものとして，幾何学的表現論で研究されてきた「Springer variety」や，旗多様体の量子コホモロジー環の研究において現れる「Peterson variety」，ルート系とトーリック幾何の繋がりを提供する「ルート系に付随するトーリック多様体」などがあるが，これらを統一的に記述する空間が Hessenberg variety である．詳細は省くが，A_n 型の場合は $n \times n$ 行列とある条件を満たす関数 $h : [n] \to [n]$ の組から定義される．

- **Hessenberg variety のコホモロジー環と対称群の表現**

（枡田幹也氏，佐藤敬志氏，堀口達也氏との共同研究）

Brosnan-Chow による研究により，regular matrix から定まる Hessenberg variety の族を考察することは特に面白く，またそのコホモロジー環の研究は regualr semisimple Hessenberg variety のコホモロジー環の研究と関連があることがわかってきた．本研究では GKM 理論を用いて regualr semisimple Hessenberg variety の（トーラス同変）コホモロジー環への対称群の表現の解析および，環としての生成元を調べる．

- **Nilpotent Hessenberg variety のコホモロジー環**

（Peter Crooks 氏との共同研究）

最高ルートベクトルと Hessenberg space の組みから決まる Hessenberg variety について研究を行っている．このケースの特別な場合としては旗多様体自身やある Springer variety が含まれる．これまでの研究から，この Hessenberg variety は GKM variety であることがわかり，現在そのコホモロジー環の明示的な表示について研究している．

- **Hessenberg variety の Newton-Okounkov 体と平坦族**

（原田芽ぐみ氏，Lauren Dedieu 氏，Jeremy Lane 氏との共同研究）

Newton-Okounkov 体の理論はトーリック多様体の理論のある種の拡張であり，幾何・表現論・組み合わせ論が混ざり合う形で現在活発に研究されている分野である．本研究の目標は Hessenberg variety について，Plucker 埋め込みから決まる直線束と有理関数体上のある付値に関してその Newton-Okounkov 体の計算を行うことである．例えば，A_2 型の Peterson variety の場合，Peteson variety があるトーリック多様体の平坦極限になっているという事実を用いることで Newton-Okounko 体の計算が可能である．regular semisimple Hessenberg variety の Newton-Okounkov 体の計算，及びその regular nilpotent Hessenberg variety の Newton-Okounkov 体との関係を調べる．

- **ルート系に付随するトーリック多様体のトポロジー**

Hessenberg variety の特別な場合として，Weyl の部屋の集まりの成す扇から定まるトーリック多様体がある．ルート系 Φ が与えられたとき，このトーリック多様体 $X(\Phi)$ を構成することができる．今，2 つのルート系 Φ_1, Φ_2 に付随するトーリック多様体 $X(\Phi_1), X(\Phi_2)$ を考えるとき，「この 2 つの空間がホモトピー同値 $X(\Phi_1) \simeq X(\Phi_2)$ ならば Φ_1 と Φ_2 は同じルート系であるか」という問題を解決したい．これまでの研究で，ルート系が既約でランクが奇数ならばこの問題は肯定的であることが分かった．ランクが偶数の場合も調べたい．