今後の研究計画

綾野孝則

今後もこれまでの研究に引き続き、任意の代数曲線の扱いやすい定義方程式を与える三浦標準形を用いて、種数の高い代数曲線に対してまでシグマ関数、アーベル関数の性質を明らかにすることを目標に研究に取り組みます。具体的には次のような問題を検討します。

1. telescopic 曲線のシグマ関数の零点に関する性質

リーマンの特異点定理は、リーマン面の幾何学的な情報から定まる自然数 m に対して、リーマンのテータ関数の零点において、次数 m 未満の微分は全て消え (0 になる)、m 次の微分には消えないものがあることを主張する定理です。しかし、実際 m 次のどの微分が消えないかはこの定理からは分かりません。[5] では、シグマ関数のべき級数展開の初期項が適当なシューア関数になることを用いて、シューア関数の微分の性質から、超楕円シグマ関数の次数 m の消えない微分が 1 つ具体的に与えられています。この結果は、$y^r = f(x)$[1]、(n,s) 曲線 [3]、telescopic 曲線 (論文リスト 1-2)、任意のリーマン面 [4] にまで拡張されました。さらに [1] では、一般化された Jacobi inversion formulae を用いて、曲線 $y^r = f(x)$ に対してシグマ関数のさらに多くの消えない微分が求められています。本研究では、telescopic 曲線にまで拡張された Jacobi inversion formulae を用いて、シグマ関数の零点に関する [1] の結果が telescopic 曲線の場合にも成り立つか検討します。

2. 任意のリーマン面に付随するシグマ関数

[4] では、リーマン面のテータ関数が KP-hierarchy の解になることを用いて、テータ関数の級数展開の初期項がシューア関数になることが示されています。そのシューア関数の微分の性質から、テータ関数の消えない微分が、ある次数 0 の正則直線束の gap sequence を用いて記述出来ることも示されています。超楕円曲線の場合には、gap sequence も具体的に書かれています。本研究では、一般の代数曲線の場合に gap sequence を具体的に書くことにより、テータ関数の消えない微分をより具体的な形で記述することを検討します。また [4] では、テータ関数の消えない微分を用いて、[2] で導入された任意のリーマン面のシグマ関数がモジュラー不変になるような正規化定数が与えられています。一方、(n,s) 曲線や telescopic 曲線のシグマ関数は、級数展開の係数が定義方程式の係数の多項式になるというモジュラー不変性より強い代数的性質を持つことが示されています。本研究では、任意の代数曲線の定義方程式を三浦標準形で表現し、[4] で定義された任意のリーマン面のシグマ関数の級数展開の係数が定義方程式の係数の多項式であることを示します。

参考文献

[1] S. Matsutani and E. Previato, "Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the C_{rs} curve $y^r = f(x)$, II", J. Math. Soc. Japan, Volume 66, Number 2 (2014), 647-692.

[2] D. Korotkin and V. Shramchenko, "On higher genus Weierstrass sigma-function", Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 241, 23-24 (2012), 2086-2094.

[3] A. Nakayashiki and K. Yori, "Derivatives of Schur, tau and sigma functions, on Abel-Jacobi images", in Symmetries, Integrable Systems and Representations, K.Iohara et al. eds., Springer (2012), 429-462.

[4] A. Nakayashiki, "Tau Function Approach to Theta Functions", International Mathematics Research Notices, rnv297, (2015).

[5] Y. Onishi, Determinant expressions for hyperelliptic functions, with an appendix by Shigeki Matsutani: connection of the formula of Cantor and Brioschi-Kiepert type. Proc. Edinb. Math. Soc. 48 (2005), 705-742.