今後の研究計画

私はこれまでの研究計画で述べたように冪零ヘッセンバーグ多様体の同変コホモロジー環について調べてきた。最近は正則なヘッセンバーグ多様体とその同変コホモロジー環に興味を持っている。これらは大雑把にいうと、ヤング図形 λ とヘッセンバーグ関数 h に依存する。正則なヘッセンバーグ多様体は、λ が横 1 行のヤング図形のとき、正則な冪零ヘッセンバーグ多様体であり、λ が縦 1 行のヤング図形のとき、正則な半単純ヘッセンバーグ多様体である。一方、正則なヘッセンバーグ多様体は、h がある意味で最小のとき、ピーターソン多様体 Pet と (A 型) ワイルチャンバーを扇とするトーリック多様体 X を結ぶものとして捉えられ、h が最大のとき、旗多様体 $F\ell(\mathbb{C}^n)$ である。図式化すると次のようになる。

$$\begin{array}{c|ccc} h & & & \\ & F\ell(\mathbb{C}^n) & \cdots & F\ell(\mathbb{C}^n) \\ & \vdots & & \vdots \\ & Pet & \cdots & X \\ \hline & & & \lambda \end{array}$$

ここで、左にある族は正則な冪零ヘッセンバーグ多様体の族、右にある族は正則な半単純ヘッセンバーグ多様体の族であり、上にある族は旗多様体の族である。正則な冪零ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環の明示的な表示はすでに与え、さらにそれと正則な半単純ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環の間にある関係も与えた（論文リスト [1-1]）。より正確に言うと、$X_{\lambda,h}$ を正則なヘッセンバーグ多様体とすると、次の環同型が成り立つということである。

$$H^*(X_{\lambda=(n),h};\mathbb{Q}) \cong H^*(X_{\mu=(1^n),h};\mathbb{Q})^{S_n}$$

ここで、半単純ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環の上への対称群 S_n の作用は Tymoczko により導入されたドット作用を表す。この環同型は、正則なヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環と正則な半単純ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環の間の次の環同型

$$H^*(X_{\lambda,h};\mathbb{Q}) \cong H^*(X_{\mu=(1^n),h};\mathbb{Q})^{S_\lambda} \tag{1}$$

に拡張されることが予想される（論文リスト [1-1] に触れている）。ここに、S_λ は S_n のヤング部分群を表す。また、(1) の両辺のベッチ数が一致していることは既に Brosnan-Chow により示されていることに注意。この予想 (1) を調べる最初の段階として、上の図式の下に位置するピーターソン多様体 Pet と (A 型) ワイルチャンバーを扇とするトーリック多様体 X を結ぶ族の同変コホモロジー環の明示的な表示を与えたい。その表示をもとに、一般の正則なヘッセンバーグ多様体の同変コホモロジー環の明示的な表示が与えられることを期待し、さらには予想 (1) が解決できることを期待する。