研究成果

1. 等径部分多様体上の法束のハミルトン極小性

 90 年代, Y.-G.Oh は, Kähler 多様体内のラグランジュ部分多様体に対し, そのハミルトン変形と呼ばれる制限付きの変形のもとでの体積変分問題を考察した. 一般にコンパクトサポートを持つハミルトン変形のもとで体積汎関数の第一変分の停留値を与えるラグランジュ部分多様体を H-極小と呼び, 無限小ハミルトン変形のもとで安定になるものを H-安定と呼ぶ. H-極小や H-安定の概念はこれまでの極小や安定の概念を含むより広い概念であるが, $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ や標準的トーラス $T^n \subset \mathbb{C}^n$ などの, 従来の体積変分理論では対象とならなかった基本的な例を含む興味深い対象であることが示された.

 複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ 内においては, H-極小ラグランジュ部分多様体の族が多く知られているわけではない. 筆者は, コンパクト半単純 Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ 上への随伴作用に関する主軌道 N の法束が接束 $T\mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}^n$ 内の H-極小ラグランジュ部分多様体になることを示し, $\mathbb{C}^n$ 内に新しい非コンパクトな H-極小ラグランジュ部分多様体の族を与えた. このような主軌道 N は, 複素旗多様体あるいは C-sapce と呼ばれているが, それらは等径部分多様体としても知られている. 筆者はさらに, 等径部分多様体のクラスのうちで, H-極小法束を持つものは, 本質的に C-space に限ることを示した.

2. 法束の極小性と austere 部分多様体

 1 の論文で用いた法束によってラグランジュ部分多様体を与える方法は, 部分多様体のガウス写像の 1 つの一般化と考えることができる. 実際, Palmer はこのアイディアを使って, 球面内の等径超曲面から, 向きづけられた 2 平面グラスマン多様体 $Gr_2(\mathbb{R}^{n+1})$ への極小ラグランジュ部分多様体が得られることを示した.

 このアイディアを「佐々木計量を持つ (単位) 接束内の (単位) 法束の極小性」として見直し, 一般的な議論を展開した. これらの論文では, 主に法束の平均曲率形式の性質について調べ, いくつかの特殊な場合には Harvey-Lawson や Palmer らの結果が拡張できることを示した.

3. 複素双曲空間内の等質ラグランジュ部分多様体の研究

 一般に, 等質部分多様体の分類は, それ自身興味深いだけでなく, 応用上重要な問題である. 特に部分多様体が超曲面の場合は, 多くの分類結果がある. Kähler 多様体内のラグランジュ部分多様体の場合にも, $\mathbb{C}P^n$ や $Q_n(\mathbb{C})$ の場合に結果がある.

 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ は非正曲率エルミート対称空間の 1 つの重要な例であるが, これまでのところ, ラグランジュ部分多様体の構成分類については手付かずであった. 本論文では, 橋永貴弘氏 (北九州高専) と共同で, $\mathbb{C}H^n$ の場合に,
 (1) Kähler 商を用いた等質ラグランジュの構成法,
 (2) 可解群作用により得られる等質ラグランジュ部分多様体の分類,
 の二点について論じた. これらにより, 等質ラグランジュ部分多様体の具体例を大量に構成した.

4. 佐々木多様体内の Legendre 部分多様体の安定性

 Kähler 多様体内の H-極小ラグランジュ部分多様体の類似として, 佐々木多様体内のルジャンドル部分多様体に対して, ルジャンドル変形 (すなわち, ルジャンドルと言う性質を保つ変形) のもとで体積変分の停留値をとる L-極小ルジャンドル部分多様体の概念がある. また, L-安定性の概念も同様に定義される. 佐々木多様体はその Riemann 錐が Kähler 多様体になることにより特徴付けられ, また, 正規佐々木多様体は, ある Kähler 多様体の主 S^1 束であることが知られている. これらのような場合は, L-極小ルジャンドル部分多様体は, 錐や射影を通じて, H-極小性ラグランジュ部分多様体と対応する. 一方, 安定性については, 一般的に対応が存在するとは言えず, ルジャンドル部分多様体固有の問題となる. 実際, 筆者は, L を奇数次元単位球面 $S^{2n+1}(1)$ 内の L-極小ルジャンドル閉部分多様体とすると, L は L-不安定であることを示した. 一方, 球面の場合とは対照的に, ϕ-断面曲率 -7 の佐々木空間形 $SL(2, \mathbb{R})$ 内に, 無数の L-安定な, 極小でない, L-極小閉曲線が存在することを示した.