研究成果

（文献は List of Papers を参照のこと）

釜江哲朗

1．ランダムネスとアルゴリズムの複雑さ

私は 1968 年頃「ランダムとは何か？」という問に興味を持ち，確率論および数理論理学の立場からこれを追求した．Kolmogorov による確率概念の定式化以前に von Mises が導入した確率概念 collective は，Kolmogorov の定式化より具体性を持ち，個々の記号列に対するランダムネスの議論に適している．長さ有限のすべての記号列が独立同一分布確率変数列としての期待値どおりの頻度で出現する長さ無限の記号列は正規列と呼ばれ 20 世紀初頭 E.Borel によって導入された．私はこの正規列が von Mises の意味での collective にどれだけ近いかを 1973 年の論文 [6] で論じた．Church により再定式化された collective は無限の記号列であって，それまでに出現した記号列を見て，次の記号を選択するどうかを計算可能な方法によって決定する限り，選択された記号列における各記号の頻度は元の記号列と同じであるという性質によって特徴付けられる．それまでに出現した記号列と無関係にあらかじめ選ばれた無限番号列により選択する場合，正規列はどのような無限番号列に対して頻度不変となるかを決定したのが [6] である．すなわち，無限番号列が 0 エントロピーと正の密度を持つことが必要十分となる．[7][8] もこれに関連した論文である．正規列に対するこれらの結果は，今でも様々な乱数列に拡張され論じられている．

Kolmogorov-Chaitin によるアルゴリズム的複雑さはランダムネスをアルゴリズムの立場からとらえる有力な手段である．私は 1973 年の論文 [5] でこの意味での情報量を論じ，すべての大きな自然数は何事に対しても一定の意味を持つ普遍的情報を所有していることを示した．この事実は，その後も “oracle” と呼ばれ論じられている．

この Kolmogorov-Chaitin による複雑さは記号列のランダムネスを一つの数値として表現する量として理論的には完璧なものであるが，計算可能でないという欠点とともに有限の任意性をともなうという欠点があり，実用的ではない．理論的・実用的の両側面から完璧とはいえなくとも十分満足できる量を [64][70] において提案した．この研究はさらなる発展が期待できる．

2．エルゴード理論とフラクタル

私はランダムネスに興味を持つとともに，それと逆の「規則性・周期性とは何か？」という問にも興味を持った．この答えを探すためにエルゴード理論の研究を始めた．統計力学において，空間平均が時間平均として実現されるかという 19 世紀物理学における根源的問い掛けが生み出したエルゴード理論は，20 世紀には数学の一分野として定着した．ここでの基本原理は個別エルゴード定理である．1982 年の論文 [18] で私はこれの超準解析を用いた全く新しい別証明を与えた．これによると，保測変換は超有限サイクルにおける回転の一歩として表現され，個別エルゴード定理は加法における結合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$ に他ならないことが示される．このアイデアは，その後超準解析を用いないエルゴード諸定理の証明に応用されている．[32] はこの一つである．

80 年代後半から私はフラクタル関数に興味を持ち，その後，これを加法と乗法の作用を持つコンパクト力学系上に同次コサイクルとして埋め込み，エルゴード理論的視点から考察する方向に発展させた．すなわち，実数 $\mathbb{R}$ が加法的かつ連続に，正の実数 $\mathbb{R}_+$ が乗法的かつ連続に作用し，結合則 $\lambda(\omega+t)=\lambda\omega+\lambda t$ $(\omega\in\Omega,\ t\in\mathbb{R},\ \lambda\in\mathbb{R}_+)$ を満たすコンパクト距離空間 Ω を考察する．さらに，Ω は加法的作用に関して最小で，唯一の不変な確率測度 P を持つと仮定する．Ω 上の加法的コサイクルとは，連続関数 $F:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で $F(\omega,t+s)=F(\omega+t,s)$ を満たすものである．さらに，これが α 次同次的（ただし，$0<\alpha<1$）であるとは，$F(\lambda\omega,\lambda t)=\lambda^\alpha F(\omega,t)$ を満たすことである．非自明な α 次同次コサイクル $F(\omega,t)$ は，任意に $\omega\in\Omega$ を固定すると，$t\in\mathbb{R}$ の関数として，α 次 Hölder 連続だが $(\alpha+\varepsilon)$ 次 Hölder 連続ではないフラクタル関数となる．また，加法に関して不変な確率測度 P の下で，α 次自己相似確率過程となる．このような Ω と同次コサイクル $F(\omega,t)$ はとくに，重み付き置換規則上に組織的に構成され，そのフラクタル的性質，エルゴード理論的性質，確率論的性質が一連の論文 [24][26][28][29][36][42][49][50] で研究された．また，[37] において，この自己相似確率過程を未来予測の問題として考察し，株価予想等の問題への応用を提案した．さらに，加法が離散スペクトルを持つことと，重み付き置換規則の固有値が Pisot 数になることの関係を [54] で論じた．

3．数論的関数と記号力学系

私は1976〜77年のフランス訪問をきっかけに，自然数 $n\in\mathbb{N}:=\{0,1,2,\cdots\}$ を r 進表示したときの digit についての関数 $f(n)\in\mathbb{A}$ の記号力学系的研究に興味を持った．すなわち，f を $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ の元と考え，f の持ち上げ Ω がこの空間上のシフト T に関して作る位相力学系 (Ω,T) の研究である．ここで，

Ω は $\{T^n f \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}};\ n \in \mathbb{N}\}$ の閉包である．とくにこの力学系のスペクトル的性質を研究した．このような関数の一つは Thue-Morse 列と呼ばれるもので，$f(n)$ は n の 2 進表示で 1 が偶数回表れれば 0，奇数回表れれば 1 を与える関数である．これについては様々な観点からの研究がある．スペクトル的観点からは，これが部分的に特異連続スペクトルを持つことが知られている．また，Rudin-Shapiro 列においては，$f(n)$ は n の 2 進表示で 1 の連なり 11 が偶数回表れれば 0，奇数回表れれば 1 を与える関数である．Rudin-Shapiro 列は Fourier 解析の分野でよく知られた列であり，この力学系のスペクトルは部分的にルベーク的となる．[10][11] において私は共著者たちと一緒に，非固定進表示でのこのような関数 f から定まる記号力学系におけるスペクトルの一般論を展開した．とくに，連続スペクトル部分を測度の意味で弱収束する無限積として表示することに成功し，この表示を用いて，連続スペクトル部分相互の絶対連続性を論じた [25]．また，[12] において，スペクトルの相互特異性が力学系相互の disjointness を意味することを示した．さらに，[17] においては，このような関数で比較的弱い条件を満たす $f(n)$ に対応する形式的べき級数 $\sum_n f(n)x^n(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})[[x]]$ の代数性と実数 $\sum_n f(n)(1/r)^n$ の超越性を論じた．

４．最大型複雑さとパターン認識

$\#\mathbb{A} \geq 2$ を満たす有限集合 $\mathbb{A}$，無限集合 Σ と $\mathbb{A}^{\Sigma}$ の空でない部分集合 Ω が与えられている．$\#S = k$ を満たす Σ の部分集合の全体を $\mathcal{F}_k(\Sigma)$ と記し，$\mathcal{F}(\Sigma) = \cup_k \mathcal{F}_k(\Sigma)$ と記す．Ω の $S \in \mathcal{F}(\Sigma)$ へのの制限 $\Omega|_S$ の元の個数 $\#\Omega|_S$ を $p_\Omega(S)$ と記し，Ω の S での複雑さと呼ぶ．すなわち，Ω の元 ω の S への制限として得られる写像 $\omega|_S$ で異なるものの総数である．Ω の最大型複雑さ $p^*_\Omega(k)$ は $k = 1, 2, \cdots$ の関数として，$p^*_\Omega(k) = \sup_{S \in \mathcal{F}_k(\Sigma)} p_\Omega(S)$ と定義される．

最大型複雑さは 2002 年私の共著論文 [39][40] において導入された．当初は $\mathbb{A}$ に属す記号の無限列 $\omega \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ に対して，

$$p^*_\omega(k) = \sup_{\{s_1 < \cdots < s_k\} \subset \mathbb{N}} \#\{\omega(n+s_1)\cdots\omega(n+s_k) \in \mathbb{A}^k;\ n \in \mathbb{N}\}$$

として導入された．Ω を $\{T^n \omega;\ n \in \mathbb{N}\}$ の閉包とすると，これは上記の $p^*_\Omega(k)$ と一致する．$p^*_\omega(k)$ が有界であることと ω が eventually periodic であることは同値であり，さらにこれは $p^*_\omega(k) < 2k$ となる k が存在することと同値となる．したがって，$p^*_\omega(k) = 2k$ がすべての $k = 1, 2, \cdots$ に対して成立する ω は aperiodic なものの中で最小の最大型複雑さを持つものであり，上記の論文で詳細に論じられた．また，力学系 (Ω, T) が適当な不変確率測度の下で部分的に連続スペクトルを持てば $p^*_\Omega(k)$ は k に関して指数的に増加することが示された．

2006 年以後，私は必ずしも $\mathbb{N}$ ではない一般の添え字空間 Σ 上の集合 Ω の最大型複雑さについて，中国で多くの共同研究 [41][43][45][47][48] を行った．さらに，これらの研究をパターン認識の問題へと発展させた [55][59][60]．すなわち，$\mathbb{A}$ を空間 Σ の各点に配置される色や明るさについてのディジタル情報と考えると，$\omega \in \mathbb{A}^{\Sigma}$ は Σ 上に描かれた画像と見なされ，Ω は画像の集合となる．これらの識別のため標本点集合 $S \in \mathcal{F}_k(\Sigma)$ での情報 $\omega|_S$ が用いられる．サイズ k の標本点集合で最大限識別できる $\omega \in \Omega$ の個数が $p^*_{\Omega}(k)$ である．この最大値を実現する $\mathcal{F}_k(\Sigma)$ の元 S は最良の標本点集合といえる．$p^*_{\Omega}(k)$ の値とともに最良の標本点集合をいかにして求めるかという研究は，パターン認識の観点から重要となる．数学的に設定されたいくつかの Ω に対して，これらの解が得られている [60]．他方，一標本点当たりの情報量 $\log p^*_{\Omega}(k)/k$ の極限，すなわち，エントロピーについて次の結果が得られた [59]．
「$h(\Omega) := \lim_{k\to\infty} \log p^*_{\Omega}(k)/k$ が存在し，$\log 1, \log 2, \cdots, \log \#\mathbb{A}$ のいずれかの限られた値をとる．」

一般に無限集合 Ω，Σ と写像 $\psi : \Omega \times \Sigma \to \mathbb{A}$ が与えられたとき，ψ を Ω と Σ の間の双対性写像と呼ぶ．上記のような無限集合 $\Omega \subset \mathbb{A}^{\Sigma}$ に対して，$\psi(\omega, \sigma) = \omega(\sigma)$ と定義すると Ω と Σ の間の双対性写像が定義される．このとき，双対性 ψ の下での Σ の複雑さ $p_{\Sigma}(T)$ が $\#\{\psi(\cdot, \sigma)|_T;\ \sigma \in \Sigma\}$ と定義される．ここで，$T \in \mathcal{F}(\Omega)$ で $\psi(\cdot, \sigma)$ は写像 $\omega \mapsto \psi(\omega, \sigma)$ を意味し，したがって，$\psi(\cdot, \sigma) \in \mathbb{A}^{\Omega}$ となる．また，Σ の最大型複雑さが $p^*_{\Sigma}(k) = \sup_{T\in\mathcal{F}_k(\Omega)} p_{\Sigma}(T)$ と定義される．このとき，$p^*_{\Omega}(k) = p^*_{\Sigma}(k)$ は一般には成立しないが，上記エントロピーについては $h(\Omega) = h(\Sigma)$ となることが示された [60]．

5．一様集合と超定常集合

空でない閉集合 $\Omega \subset \mathbb{A}^{\Sigma}$ が一様集合であるとは，Ω の $S \in \mathcal{F}(\Sigma)$ での複雑さ $p_{\Omega}(S)$ が $\#S$ のみの関数となることをいい，これを $\#S = k$ の関数と考えたもの $p_{\Omega}(k)$ を Ω の一様複雑さと呼ぶ．k についてのどのような関数が一様複雑さとなるかという問題は興味ある問題である．これについては，[59] で詳しく論じられている．

ここで，一様複雑さは必ず超定常集合によって実現されるという事実が重要となる．ただし，空でない閉集合 $\Theta \subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ が超定常集合であるとは，任意の $\mathbb{N}$ の無限部分集合 $\mathcal{N} = \{N_0 < N_1 < \cdots\}$ に対して，$\Theta[\mathcal{N}] = \Theta$ が成立することをいう．ここで，$\omega \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ に対して，$\omega[\mathcal{N}] \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ は，$\omega[\mathcal{N}](n) = \omega(N_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ を満たす元であり，$\Theta[\mathcal{N}] = \{\omega[\mathcal{N}];\ \omega \in \Theta\}$ と定義される．事実，任意の一様集合 $\Omega \subset \mathbb{A}^{\Sigma}$ に対して，injection$\varphi : \mathbb{N} \to \Sigma$ が存在し，$\Omega \circ \varphi \subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ が超定常集合となることが知られている [56]．また，超

定常集合についてはいくつかの特徴付けが知られているが，その一つは，条件 (#) を満たす禁止語の有限集合 $\Xi \subset \mathbb{A}^+$ が定める $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ の元全体 $\mathcal{P}(\Xi)$ となるということである．ここで，$\mathbb{A}^+ = \cup_{k=1}^{\infty}\mathbb{A}^k, \xi \in \mathbb{A}^k$ が $\omega \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ における禁止語であるとは，$\omega(s_1)\cdots\omega(s_k) = \xi$ となる $\{s_1 < \cdots < s_k\} \subset \mathbb{N}$ が存在しないことをいい，$\mathcal{P}(\Xi)$ は Ξ に属すどの元 $\xi \in \Xi$ も禁止語であるような $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ の元 ω の全体からなる集合を意味する．また，$\mathbb{A}^+$ の有限集合 Ξ が満たすべき条件 (#) については [56] を参照のこと．この特徴付けを用いることにより，超有限集合 Θ の一様複雑さ $p_\Theta(k)$ を求める帰納的公式が得られる．

一様集合のみならず，すべての空でない集合が一個以上の超定常集合をある種の極限として保有していることが示される [61]．これらは Ω の超定常因子と呼ばれている．(Ω, T) が記号力学系で，シフト T が時間経過を表すとき，Ω の超定常因子は，力学系の時間量に依らない性質を表しており，従来から知られれている不変量，例えば，エントロピーのように時間量を敏感に反映するものと対極にあり興味深い．超定常因子の研究は今後の課題である．