

# これまでの研究成果のまとめ

河村 建吾

## 古典的結び目のクラスプ数について

クラスプ数とは 1970 年代に定義された古典的結び目の不変量であるが、クラスプ数についての研究はあまり進展がみられなかった。私は門上晃久氏との共同研究において素な古典的結び目のクラスプ数の決定を試みた。古典的結び目  $K$  のクラスプ数  $c(K)$  は種数  $g(K)$  と結び目解消数  $u(K)$  によって下から評価されることが知られている。すなわち  $c(K) \geq g(K)$  および  $c(K) \geq u(K)$  が成り立つ。交点数の少ない素な結び目は  $c(K) = g(K)$  または  $c(K) = u(K)$  が成り立つので次の問題を考察した： $c(K) > g(K)$  かつ  $c(K) > u(K)$  を満たす素な結び目  $K$  は存在するか。我々はクラスプ数が 2 以下である古典的結び目のコンウェイ多項式の代数的な性質を調べることでこの問題を次のように肯定的に解決した。 $c(K) > g(K)$  かつ  $c(K) > u(K)$  を満たす素な結び目  $K$  は無限個存在する。この結果から交点数が 10 以下の素な結び目のクラスプ数を 249 個中 234 個決定することができた。

## 曲面絡み目のダイアグラムとローズマン変形

曲面絡み目とは  $\mathbb{R}^4$  内に埋め込まれた閉曲面のことである。曲面絡み目の  $\mathbb{R}^3$  への射影像（に上下の情報を加えたもの）を曲面結び目のダイアグラムという。D. Roseman によって曲面絡み目の同値関係を生成するダイアグラムにおける 7 種類の局所変形  $R_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) が導入された。この 7 種類の局所変形はローズマン変形と呼ばれており、これは古典的結び目理論における (3 種類の) ライデマイスター変形の拡張となっている。各ライデマイスター変形はその他 2 種類の変形から独立であることが良く知られている。一方、ローズマン変形  $R_2$  はその他 6 種類の変形から独立でないことが知られている。私はローズマン変形の独立性の問題に取り組み、 $R_2$  以外のローズマン変形の独立性を完全に決定した。さらに田中心氏と大城佳奈子氏との共同研究では、同値な曲面絡み目を表す 2 つのダイアグラム  $D$  と  $D'$  で次を満たすものを構成した： $D$  を  $D'$  に移すローズマン変形の有限列に 3 重点を含むローズマン変形が必ず現れる。

## リボン・クラスプ型曲面絡み目とその表示

リボン交差のみを持つような特異ハンドル体を張る曲面絡み目のことをリボン型曲面絡み目という。リボン型曲面絡み目は自明な球面絡み目から 1-ハンドル手術で得られる曲面絡み目であり、 $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$  を対称とする標準形に置けることが知られている。また、リボン型トラス結び目  $F$  は溶接結び目  $K$  によって表すことができ、結び目群  $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$  は溶接結び目の群  $G(K)$  と同型であることが知られている。鎌田聖一氏との共同研究において、3次元のクラスプ交差を 4次元版に拡張することでリボン・クラスプ型曲面絡み目を新しく導入した。リボン・クラスプ型曲面絡み目とはリボン交差とクラスプ交差のみを持つような特異ハンドル体を張る曲面絡み目のことである。そして、リボン・クラスプ型曲面絡み目に対して次のことを証明した。(1) リボン・クラスプ型曲面絡み目は自明な球面絡み目から 1-ハンドル手術とフィンガー移動で得られる曲面絡み目であり、 $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$  を対称とする標準形に置くことができる。(2) リボン・クラスプ型トラス結び目  $F$  は半溶接結び目  $K$  によって表すことができ、結び目群  $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$  は半溶接結び目の群  $G(K)$  と同型である。