2013 年に植田一石氏と行った共同研究により, Ebeling-Ploog's の transpose duality は, bimodal 特異点と他の孤立超曲面特異点に付随した重み付き $K3$ 超曲面の族の間の polytope duality に拡張することが証明された. この研究を更に進めると, このような族のうち幾つかの場合には polytope duality が次のように lattice mirror 対称に拡張することが証明された.

Δ と Δ' を Mase-Ueda による研究で得られた反射的な多面体とする. 多面体 Δ と Δ' に付随する重み付き $K3$ 超曲面の族 $(\mathcal{F}_\Delta, \mathcal{F}_{\Delta'})$ が *lattice mirror* 対称的 であるとは, Picard 格子の間の同型

$$\mathrm{Pic}(\Delta) \simeq U \oplus T(\Delta')$$

が成り立つことをいう. 問題にしている孤立超曲面特異点のうち, 次の表に挙げられたものに対して, 対応する族は lattice mirror 対称的である.

$C_8^6 := \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ と記す.

特異点	$\mathrm{Pic}(\Delta)$	$\rho(\Delta)$	$\rho(\Delta^*)$	$\mathrm{Pic}(\Delta^*)$	特異点
Q_{12}	$U \oplus E_6 \oplus E_8$	16	4	$U \oplus A_2$	E_{18}
$Z_{1,0}$	$U \oplus E_7 \oplus E_8$	17	3	$U \oplus A_1$	E_{19}
E_{20}	$U \oplus E_8^{\oplus 2}$	18	2	U	E_{20}
$Q_{2,0}$	$U \oplus A_6 \oplus E_8$	16	4	$U \oplus C_8^6$	Z_{17}
E_{25}	$U \oplus E_7 \oplus E_8$	17	3	$U \oplus A_1$	Z_{19}
Q_{18}	$U \oplus E_6 \oplus E_8$	16	4	$U \oplus A_2$	E_{30}

以下のような問題を次に考える. $(\Delta_{MU}, \Delta'_{MU})$ を Mase-Ueda による研究で得られた反射的多面体のペアとする. これらに対応する族は lattice mirror 対称的でないと仮定する. 対応する族が lattice mirror 対称的になるような, $(\Delta_{MU}, \Delta'_{MU})$ とは異なるペア (Δ, Δ') は存在するか ?

一般に反射的多面体 Δ に対応する toric 多様体 $\mathbb{P}_\Delta$ の特異点解消を $\tilde{\mathbb{P}}_\Delta$ と記す. $\mathbb{P}_\Delta$ の generic な反標準因子 Z とその同時特異点解消 $\tilde{Z}$ に対して, $L_0(\Delta)$ を 自然な制限写像

$$r : H^{1,1}(\tilde{\mathbb{P}}_\Delta) \to H^{1,1}(\tilde{Z}).$$

の cokernel の階数とする.

現在までで, 次の否定的結果を得ている:

例. 自己双対な transpose pair $B = B' = W_{18}$-特異点を考え, 多面体 Δ を以下のように選ぶ:

$$\Delta = \mathrm{Conv}\,\{(0,-1,0), (-2,3,0), (-3,5,-1), (1,-1,0), (0,0,1)\}.$$

このとき, Δ は反射的であり, $L_0(\Delta) = 0$ である.

実際, $\Delta_{[MU]} = \Delta_{(a;d)} = \Delta_{(3,4,7,14;28)}$ の部分反射的多面体のうち, $L_0 = 0$ をみたすのはこの多面体しかあり得ない.
何故ならば, $\Delta_{[MU]}$ において 頂点 $(0,-1,0)$ と $(2,-1,0)$ をつなぐ辺上には内点が一つあり, それが 階数 L_0 を 6 だけ増加させている. 故に頂点 $(2,-1,0)$ は多面体 $\Delta_{[MU]}$ から取り除かれなければならない. 更に反射的多面体にするため, 頂点 $(-1,1,1)$ もまた取り除かれなければならない. 故に上に挙げた多面体 Δ が得られる.

更に, $\rho(\Delta) = 17$ と $\rho(\Delta^*) = 1$ もわかる. この事と $L_0(\Delta) = 0$ であることを合わせて, $\rho(\Delta) + \rho(\Delta^*) = 17 + 1 + 0 = 18 \neq 20$ となる. 従って, 格子の同型 $\mathrm{Pic}(\Delta) \simeq U \oplus T(\Delta')$ は明らかに成り立たない. 故にこのペアの場合に問題への解答は 「No」 である.