今後の研究計画 森 淳秀

コンフォリエーション理論は，3 次元多様体上の葉層と接触構造のトポロジーを統一する試みであるが，Thurston-Bennequin 不等式という最も重要な指標にさえ困難がある．不等式を満たす（つまりタイトな）接触構造の極限となる葉層は不等式を満たすが，逆は成り立たない．また接触構造がタイトであることと「Lutz 管」を含まないことは同値であるが，葉層構造がその対応物である「Reeb 成分」を含まないことは不等式の十分条件でしかない.（じじつ応募者は任意のタイトな接触構造を変形して Reeb 成分を持つが不等式を満たす葉層を構成した.）

この困難は葉層と接触構造のトポロジーが似た発展をしたことを現象論的に追求する限り仕方のないことだろう．同様の困難はタイト接触構造とシンプレクティック多様体の境界となりうる接触構造の違いにも現れる．弱シンプレクティック充填可能な 3 次元の接触構造はタイトであるが，分離的トーラスを含む多様体などの上には弱シンプレクティック充填可能でないタイト接触構造がたくさんある.（同様の現象は高次元でも知られている.）ところがシンプレクティック化の劣水平集合に Weinstein 2-ハンドルを接着することによる接触多様体の手術は，弱シンプレクティック充填可能性のみならずタイト性を保つ (Wand '15, Ann. Math.).

この驚くべき結果を次の観察を鍵として解明し，高次元化したい．$(2n+1)$ 次元有向多様体上で，2-形式 τ に対して，$\alpha \wedge (d\alpha + \tau)^n > 0$ を満たす 1-形式 α を捩れ τ の捩れ接触構造という．α が任意の $\varepsilon \in (0, 1]$ について捩れ $\varepsilon\tau$ の捩れ接触構造であるとき，α を $\varepsilon\tau$-コンフォリエーション形式という．このとき $\alpha \wedge (d\alpha)^n \geq 0$ が成り立つので，$\ker \alpha$ は（Altschuler-Wu による）弱い意味でのコンフォリエーションとなる．葉向概シンプレクティック構造を持つ余次元 1 葉層が $\varepsilon\tau$-コンフォリエーションの典型例となることに注意すれば，接触構造を Poisson 構造に変形するためには，この $\varepsilon\tau$-コンフォリエーションを経由させるのが自然であることが分かる.（じじつ応募者は三松氏の Poisson 構造が S^5 の接触構造からこうした変形で得られることを示した.）同様にしてシンプレクティック構造の拡張概念を定義し，境界を持つ場合に，境界のコンフォリエーションとの自然な両立条件を考えれば，それは最近ようやく定義された高次元での弱シンプレクティック充填の概念を一般化したものになっている．これを利用して，3 次元の場合も含めて，弱シンプレクティック充填可能性とタイト性のギャップを埋めることができれば，接触構造のトポロジーと似ているのは，シンプレクティック構造を少し拡張したものだということになる．そうした新しい題材をトポロジーにもたらす仕事をしたい．