

これまでの研究成果

岡崎真也

3次元球面 S^3 に埋め込まれたハンドル体をハンドル体結び目と呼び H で表す。昨年度はアレクサンダー不変量に由来するハンドル体結び目の不変量を構成した。ハンドル体結び目に対してアレクサンダー多項式はそのメリディアン系のとり方の分だけの曖昧さがあったが、これはメリディアン系のとり方に依らない不変量である。

簡単のためにハンドル体結び目の種数を2とする。与えられたハンドル体結び目 H に対してメリディアン系を任意に1つ選ぶ。第 d 番目の多変数アレクサンダー多項式を $\Delta_{(H,M)}^{(d)}(s,t) = \sum_i c_i s^{x_i} t^{y_i}$ とする。 $\Delta_{(H,M)}^{(d)}(s,t)$ から以下のようにして抽象的なグラフを構成する。

2変数ローラン多項式 $f(s,t)$ を考えるとその各項は $T_i = c_i s^{x_i} t^{y_i}$ という形をしている。各項に対応するグラフの黒頂点 b_i として c_i をラベルしたものとする。また任意の3項 $T_i = c_i s^{x_i} t^{y_i}$ 、 $T_j = c_j s^{x_j} t^{y_j}$ 、 $T_k = c_k s^{x_k} t^{y_k}$ に対して \mathbb{R}^2 上の点 (x_i, y_i) 、 (x_j, y_j) 、 (x_k, y_k) をそれぞれ対応させる。グラフの白頂点として $x_i y_j + x_j y_k + x_k y_i - x_i y_k - x_j y_i - x_k y_j$ をラベルしたものとする。このときこの白頂点は b_i 、 b_j 、 b_k と辺で結ばれている。こうして得られたグラフを G_f で表す。 $G_{\Delta_{(H,M)}^{(d)}(s,t)}$ を $G_H^{(d)}$ と表すこととする。

定理1

グラフ $G_H^{(d)}$ はハンドル体結び目 H の不変量である。

この不変量の応用として次の結果が得られた。

2変数ローラン多項式 $f(s,t)$ を $c f_1 f_2 \dots f_n$ と定数 $c \in \mathbb{Z}$ と既約多項式 f_1, f_2, \dots, f_n に因数分解する。 $f(s,t) = 0$ のとき、 $\hat{G}_f = \{G_f | f \in \mathbb{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]\}$ で定め、そうでないときは $\hat{G}_f = \{G_{f_i} | 1 \leq i \leq n\}$ で定める。すると集合 $\hat{G}_H^{(d)} = \hat{G}_{\Delta_{(H,M)}^{(d)}(s,t)}$ は H の不変量である。同様にして2成分絡み目 L に対しても $\hat{G}_L^{(d)}$ を定めると以下が成り立つ。

定理2

任意のハンドル体結び目 H とその成分絡み目 L に対して、 $\hat{G}_H^{(d+1)} \subset \hat{G}_L^{(d)}$.