今後の研究計画

大野 晋司

これまでの研究成果をふまえて, 次の 3 つの課題に取り組みたい.

1. 弱鏡映部分多様体について 可換な Hermann 作用の弱鏡映軌道の分類を目標に研究を進めたい. 超球面内には, 弱鏡映でない austere 部分多様体が存在する. したがって, コンパクト対称空間内にも弱鏡映でない austere 部分多様体が存在することが予想できる. 部分多様体が弱鏡映でない事を示すためには, 軌道が弱鏡映であることの必要条件を与える必要がある. 部分多様体が超曲面であるときは, 有用な必要条件が存在する. しかしながら, 高余次元の場合はそのような必要条件は未だ見つかっていない. 新たに弱鏡映性の必要条件を与えることができれば, ausutere 部分多様体が弱鏡映でないことを示すことができるようになる事が期待できる. また, これまでの研究の手法は, 内部自己同型を用いて弱鏡映を構成する方法であった. Lie 群の外部自己同型を用いて弱鏡映を構成する方法について考える.

また, 最近, 広島大の武富氏が弱鏡映部分多様体の一般化である arid 部分多様体の概念を導入した. arid 部分多様体は極小部分多様体である. arid 部分多様体の性質を調べることで弱鏡映部分多様体の新たな性質が得られることが期待できる.

2. 軌道空間を共有する複数の Lie 群作用の軌道の幾何学的性質の対応について 可換なコンパクト対称三対 (G, K_1, K_2) が誘導する 3 つの Lie 群作用 $K_2 \curvearrowright G/K_2, K_1 \curvearrowright G/K_1$(Hermann 作用), $K_2 \times K_1 \curvearrowright G$ は軌道空間を共有している. さらに軌道の間には Riemann 幾何学的な性質の対応が見られる. 例えば 3 つの作用の極小軌道, austere 軌道は互いに対応している. 一方で, 全測地的軌道については, Hermann 作用 $K_2 \curvearrowright G/K_2, K_1 \curvearrowright G/K_1$ については対応が見られるが, $K_2 \times K_1 \curvearrowright G$ を加えると対応が得られない. よって軌道の弱鏡映性や二重調和性などの性質についてもこのような対応を考えることが問題となる. 2. の研究は 1. の研究の助けになることが大いに期待できる.

逆に幾つかの群作用にどのような条件を課すと軌道の幾何学的性質に対応が見られるかを調べることも興味深い問題の一つである. 例えば Lie 群の岩澤分解 $G = KAN$ についても Hermann 作用のように 3 つの作用 $K \curvearrowright G/N,\ N \curvearrowright G/K, K \times N \curvearrowright G$ を考えることができる. この 3 つの作用の軌道に幾何学的性質の対応があるかどうかは興味深い.

3. 二重調和部分多様体について これまでの二重調和部分多様体に関する研究の手法は, 高余次元の部分多様体にも適用できる. この手法を余等質性が高い Hermann 作用に適用することによって, 高余次元の二重調和部分多様体の例が数多く得られることが大いに期待できる. 実際に, 幾つかの高余次元の二重調和部分多様体がこの方法で構成できる. また, コンパクト対称三対から誘導される Lie 群への作用 $K_2 \times K_1 \curvearrowright G$ に関しても, 対称三対を用いた二重調和軌道の特徴付けが可能であり, コンパクト Lie 群内の二重調和部分多様体の例が得られることが期待できる.

さらに, この手法は対称空間のイソトロピー表現の軌道にも適用可能である. 高余次元の二重調和部分多様体の例は多くは発見されていないので, 球面内の高余次元の二重調和部分多様体の例を数多く得る事ができれば, 一般の二重調和写像の研究に役立つことが期待される.

E-mail address: `oono-shinji@ed.tmu.ac.jp`