今後の研究計画

大田武志

2009 年の Alday-Gaiotto-Tachikawa の仕事により, 2 次元共形場理論と 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の間の対応が, 新たな注目を集めています. 2 次元理論の相関関数 (共形ブロック) は, ゲージ理論のインスタントン分配関数と同一視できることが示されたのです.

この「2 次元/4 次元対応」は, いろいろな一般化がなされてきました. その一つとして, 「q-変形」された 2 次元共形場理論と, 4 次元から 5 次元へ「q-もちあげ」された超対称ゲージ理論の間の対応が提唱されています. q 変形された 2 次元の理論は, q-Virasoro 代数や q-W 代数などの対称性を持ち, もともとの理論の持っていた対称性が q-変形されています. 一方, q-もちあげされた 5 次元ゲージ理論では, 第 5 次元方向が S^1 にコンパクト化されていて, コンパクト化の半径が $\log q$ に比例しています.

2 次元理論において, 中心的な役割を果たしている q-Virasoro 代数は, 導入されて 20 年が経過しましたが, その表現論についての理解はいまだ不十分です. とくに共形場理論のプライマリー場について, その q-変形版の頂点演算子を決定する第一原理はよくわかっていません.

われわれは, 最近の研究で「2 次元/5 次元対応」を足掛かりにして, 5 次元 $\mathcal{N}=2$ $SU(2)$ ゲージ理論の Nekrasov 分配関数と一致する, q-変形ブロックの演算子表現を決定しました. つまり, q-頂点演算子を具体的に求めたのです. そして, 2 次元共形ブロックのクーロンガス表示 (Dotsenko-Fateev 積分表示) の q-変形版を得ることができました. この結果をもとに, q-プライマリー場の持ついろいろな性質について解明することを目指します.

ただし, 1 種類の頂点演算子のみを用いた q-クーロンガス表示の q-ブロックを 5 次元 Nekrasov 関数と一致させようとすると, 頂点演算子の挿入位置を素直な場所からすこしずらさなくてはなりませんでした. この理由は現時点では不明なので, この点についてももうすこし詳しく調べていく予定です.

また, われわれは, 2 次元側での q のベキ根極限を調べ, q-Virasoro 代数や, q-W 代数から, パラフェルミオン代数が得られることを示しました. 引き続き, この極限を詳しく研究し, 「2 次元/4 次元対応」のさまざまな性質を解明することを目指します. とくに, A 型以外の ALE 空間上のゲージ理論やクイバー型のゲージ理論の場合に、どのように拡張がなされるかということも、とりあげてみたい研究テーマのひとつです. クイバー型ゲージ理論に付随した「ヤンギアン代数」というものが提唱されています. Schur-Weyl 対応において、ヤンギアン代数はヘッケ代数と関連しているので, こういった方向への拡張をこころみることは, ゲージ理論/共形場理論/行列模型対応についての理解をより深めてくれるでしょう.

いろいろな「2 次元/4 次元対応」が, 「2 次元/5 次元対応」から理解できたように, もしかするとこの「2 次元/5 次元対応」もより根源的な対応から理解できるかもしれません. より統一的な立場からこれらの対応関係の理解を深めることも試みていきたいと考えています.