今後の研究計画

まず, 長期的な目標は, ミラー対称性という現象から派生する重要な予想の一つである Thomas-Yau 予想の理解と, その解明に必要と思われる道具の用意である. Thomas-Yau 予想のキーワードは, 特殊ラグランジュ部分多様体, ラグランジュ平均曲率流, そして安定性である. 「これまでの研究成果」でも述べた通り, ラグランジュ部分多様体を平均曲率流に沿って変形していくと, 一般には途中で特異点が生じてしまい, そのままでは変形を続けることが不可能な状態になる. そこで Thomas は, ラグランジュ部分多様体に対して "安定性" の概念を導入し, Yau と共に「最初のラグランジュ部分多様体 L_0 が安定ならば, その平均曲率流 L_t は途中で特異点を形成することはなく, 最後まで (時間無限大まで) 流れ続け, 最終的にはハミルトン変形類の中の一意的な特殊ラグランジュ部分多様体に L_∞ に収束する」と予想した.

現在私が注目している予想の一つに「最初のラグランジュ部分多様体 L_0 が "グレイデッド" ならば, その平均曲率流 L_t は I 型特異点を形成することはない」というものがある. これは Thomas-Yau 予想が真であるための必要条件とも思えるような非常に興味深い現象である. 上記の予想はいくつかの具体的な場合や特殊な条件を課した場合には証明されているが, 真に一般の場合には証明されていない. その理由の一つとして, 平均曲率流の I 型特異点には一般型と特殊型という 2 つの概念が存在するということが挙げられる.

この現象を完全に証明するために現在私が重要だと思っているのは Stone の論文である. その論文では平均曲率流を $\mathbb{R}^{n+1}$ の中で考える. さらに $\mathbb{R}^{n+1}$ の中を平均曲率流に沿って動く部分多様体は余次元 1 であり, かつ平均曲率がゼロ以上 ($H \geq 0$) であると仮定する. すると, この仮定の下では, 「一般 I 型特異点は実は全て特殊 I 型特異点である」ということが証明できる. 私はこの Stone の結果が一般のリーマン多様体の場合に拡張できれば, それを適用することで, 上記のグレイデッドラグランジュ部分多様体に対する予想は証明できると考えている. 従って, 中期的には, この Stone の結果の拡張を行う.

Stone の結果を拡張するために, まず短期的な目標として取り組むべき課題は, Huisken の「単調性公式」と呼ばれる微分不等式を一般のリーマン多様体に拡張することである. Huisken の単調性公式とは, 大まかに言えば, 「$\mathbb{R}^{n+1}$ の中を動く平均曲率流の上で, 後退熱核を積分した量は時間が経つにつれて単調に減少する」というものである. 私のこれまでの研究により, 少なくとも一般のリーマン多様体で純粋に同じことをしても, 曲率の影響により, 後退熱核を積分した量は単調減少にはならないことが分かっている.

ここから先の話は, あくまで計画がうまくいった場合の話である. まず Huisken の単調性公式を「単調減少である」という性質を諦めて, 弱い意味で拡張する. 詳しく言えば, 平均曲率流の上で後退熱核を積分した量を仮に $\Theta(t)$ と書くことにすると, 外の空間が $\mathbb{R}^{n+1}$ の場合は Huisken の単調性公式により $\frac{d}{dt}\Theta(t) \leq 0$ が言える. この主張を, 一般のリーマン多様体の場合には「$\frac{d}{dt}\Theta(t)$ は正にもなり得るが, その値は非常に小さい」 といった評価付きの主張に変える. $\frac{d}{dt}\Theta(t)$ に対してどの程度良い評価が得られれば全ての話がうまくいくのかは今のところ分からない. また, 後退熱核ではなく, 後退熱核に何らかの意味で近い関数を積分するという手法も考えられる.

Huisken の単調性公式の一般のリーマン多様体への拡張が成功した時点で, 次に Stone の結果の一般のリーマン多様体への拡張を行う. そして Stone の結果の一般化ができた後は, その結果を使って, 一般のカラビヤウ多様体の中で「最初のラグランジュ部分多様体 L_0 が "グレイデッド" ならば, その平均曲率流 L_t は I 型特異点を形成することはない」という主張を証明する. この証明に Stone の結果の一般化以外に必要な一般化すべき道具があれば, その都度それらの研究を行う.