

これまでの研究成果

私の専門は微分幾何学である。また、研究のキーワードは「特殊ラグランジュ部分多様体」と「平均曲率流」である。研究の大きな目標は、「ミラー対称性」という数学や物理学の様々な場面で登場する不思議な現象の理解である。特殊ラグランジュ部分多様体とはミラー対称性の理解に欠かせない重要な対象の一つであり、私はこの特殊ラグランジュ部分多様体の研究から開始した。特殊ラグランジュ部分多様体は Calabi-Yau 多様体の中で定義される極小なラグランジュ部分多様体であり、局所的には非線形偏微分方程式の解として定義されるため、大域的な具体例を構成することが難しい。私が特殊ラグランジュ部分多様体の研究を行った 2011 年の時点で良く知られていた具体例は Harvey-Lawson によるものと Joyce によるものがあり、両者共に、複素平面 \mathbb{C}^m 内で構成されたものであった。そこで私は、それらの構成方法の特徴だけを抽出し、それが \mathbb{C}^m だけではなく、 \mathbb{C}^m の一般化である「トーリック佐々木多様体の錐」に対しても適応可能であることを見出した。これに関してまとめた論文が「Special Lagrangians and Lagrangian self-similar solutions in cones over toric Sasaki manifolds」である。

次に、研究を進めていく中で、特殊ラグランジュ部分多様体をより抽象的に構成するためには「ラグランジュ平均曲率流」を研究することが重要であることが分かった。ラグランジュ平均曲率流とはラグランジュ部分多様体が自己の体積を小さくしようと時間が経つにつれて動いていく発展方程式である。従って（理想的に言えば）最後には極小なラグランジュ部分多様体、すなわち特殊ラグランジュ部分多様体に行き着くであろうというストーリーである。このラグランジュ平均曲率流についても既存の具体例は少ない状態であったが、Lee-Wang の \mathbb{C}^m 内のラグランジュ平均曲率流の具体例を論文「Weighted Hamiltonian stationary Lagrangian submanifolds and generalized Lagrangian mean curvature flows in toric almost Calabi-Yau manifolds」において、トーリック概カラビヤウ多様体の中に完全に拡張した。このラグランジュ平均曲率流の具体例は途中で特異点を何度（有限回）も形成し、さらに特異点を形成する前後でラグランジュ部分多様体のトポロジーが変わるという現象を捉えている。

上の例が示す通り、ラグランジュ平均曲率流は一般には途中で特異点を形成してしまう。従って、次に研究すべき課題は「もしラグランジュ平均曲率流が途中で特異点を形成するならば、その特異点はどのようなものであるか？」を明らかにすることである。この問題に関しては、外の空間が \mathbb{R}^m の場合には Huisken による先行結果がある。その結果を二木昭人氏と服部広大氏との共著論文「Self-similar solutions to the mean curvature flows on Riemannian cone manifolds and special Lagrangians on toric Calabi-Yau cones」において、リーマン錐多様体に対して拡張した。その主定理は「平均曲率流が I 型と呼ばれる特異点を途中で形成するならば、その特異点の近傍を拡大すると、自己相似解と呼ばれるある種のソリトン解が得られる」というものである。

そして論文「Ricci-mean curvature flows in gradient shrinking Ricci solitons」において Huisken 氏の結果を今度は勾配縮小リッチソリトンから自然に構成されるリッチフローと平均曲率流のカップリングであるリッチ平均曲率流に対して完全に拡張した。この論文では \mathbb{R}^m での自己相似解の定義を縮小勾配リッチソリトンに対して拡張した意味での自己相似解が登場する。 \mathbb{R}^m 内の自己相似解に対しては多くの先行研究が存在する。すると、自然な興味として、それらの先行研究が縮小勾配リッチソリトン内に対して拡張された意味での自己相似解に対しても同様に成立するか？というものが湧き上がる。これに関して Futaki-Li-Li による \mathbb{R}^m 内の自己相似解に対する直径の評価は、ラグランジュ部分多様体という仮定の下では、縮小勾配リッチソリトン内に対して拡張された意味での自己相似解に対しても同様に成立するという事実を証明した。これに関してまとめた論文が「Lagrangian self-similar solutions in gradient shrinking Kähler-Ricci solitons」である。この論文では、さらに Cao-Li の結果の拡張も行っている。