今後の研究計画

山崎陽平

これまで研究した横方向不安定性の研究を踏まえて, 次の内容について研究する.

(1) 様々な方程式に対する横方向不安定性の研究

本研究を行う上で重要になるのが, 横方向不安定性の研究である. 定在波周りの解挙動の研究は, 扱う方程式により, 問題の難しさが左右される. 様々な方程式について, 定在波の安定性や線形化作用素を研究し, 解析しやすい具体的な定在波と方程式を探す.

さらに, 今まで研究した方程式について, 不安定な定在波の近くの解の振る舞いをより詳しく調べる. 退化型の安定性の議論の先行結果である Comech と Pelinovsky の結果では不安定な定在波の周辺の解が中心多様体の近傍でどう振る舞うかを詳細に解析し, 不安定性を示していた. 分岐点における定在波でには Comech と Pelinovsky の結果は適用できないが, これまでの研究 (ii) の議論と組み合わせることで, 不安定定在波の周辺の解が中心多様体の近傍でどのように不安定化するか解析できると期待される.

(2) 分岐する前の安定な定在波の周りの解挙動（定在波の漸近安定性）

適当な条件下で, 全空間 $\mathbb{R}^N$ 上のポテンシャル付き質量優臨界の非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) について, 自明解から分岐する小さな定在波の漸近安定性が示されている. しかし, 空間 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ 上の (NLS) の線状定在波の場合, 横方向 ($\mathbb{T}_L=\mathbb{R}/2\pi L\mathbb{Z}$) はコンパクトであるため, 分散性が弱く, 漸近安定性を示すのは難しい.

この困難を回避するために, $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ 上の Zakharov–Kuznetsov 方程式 (ZK) について, 線状進行波の漸近安定性を考える. (ZK) では重みつきノルムを用いることで, 解の散乱部分の減衰を得ることができる. さらに, 指数型の重みを付けることで, 小さな進行波は除外され, 線状進行波周りの解の漸近挙動が解析できると考えられる.

(3) 不安定な定在波が漸近する解軌道の存在（中心安定多様体の存在）

多くの場合, 不安定な進行波の近くの解はいくつかの安定な進行波と散乱部分に分裂すると考えられている. この問題は完全可積分系である 1 次元 3 次 NLS や KdV 方程式などでは知られているが, 非可積分系である (ZK) などでは大変難しい問題である. この問題の足掛かりとして, $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ 上の (ZK) の不安定化した線状進行波周りの中心安定多様体について調べる. 分岐点近くの線状進行波周りの中心安定多様体が構成できれば, 線状進行波の分岐とその周りの解の挙動の関係を調べる手がかりとなりうる.

中心安定多様体を構成するとき, 次の点が問題になる. 空間 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ が $\mathbb{T}_L$ 方向にコンパクトであるため, 分散性が低い. 故に, Strichartz 評価などでは中心安定多様体を構成するのに必要な散乱部分の時間減衰が得られない. また, 定常方程式の線形化作用素は虚軸に無限個の固有値を持つため, 線形化作用素から分散性を引き出すことが難しい.

そこで, 指数型の重みつきノルムを考える. 指数型の重み付きノルムにより, 空間減衰の遅い小さな進行波は存在しなくなる. さらに, 散乱部分の重み付きノルムの時間減衰を引き出されるため, 中心安定多様体を構成できると考えられる.

(4) 不安定な定在波から離れる解の漸近挙動

先行結果の数値実験によると, ある不安定化した線状定在波を摂動させた解は, 複数の 2 次元的に減衰したの進行波に分裂することが知られている. この先行結果より,「不安定化した線状進行波を摂動した解」は「性質の異なる進行波から作られる多重進行波」と「散乱部分」になると予想される. この数値実験を理論的に示すために, まず, (ZK) について「性質の異なる進行波から作られる多重進行波」の存在について研究する. そして,「多重進行波のなす解集合」と「(3) で得られた中心安定多様体」の関連性を調べることで, 線状進行波から離れる解の漸近挙動について研究する. この研究がうまくいけば, 高いエネルギーを持つ線状進行波の近くの解がいくつかの安定な進行波と散乱部分に分かれる例を与えられ, 一般の解の漸近挙動の研究の先駆けとなる.