これまでの研究成果のまとめ

山崎陽平

私がこれまで研究してきた線状定在波の安定性の研究成果について、以下で説明する。

(i) 2 連立非線形 Schrödinger 方程式系の横方向不安定性の研究

本研究では, 空間 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ で定義されたラマン散乱を記述する方程式系を簡略化した 2 連立非線形 Schrödinger 方程式系 (以下 (2NLS) と表記) の線状定在波について横方向不安定性を示した. ただし, $\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/2\pi L\mathbb{Z}$. ここで, 線状定在波とは空間 $\mathbb{R}$ 上の (2NLS) の定在波を空間 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ 上の (2NLS) の定在波とみなしたものである. 横方向不安定性とは, 空間 $\mathbb{R}$ 上の (2NLS) で安定であった定在波が横方向 $\mathbb{T}_L$ の影響により線状定在波として不安定であることをいう. 線状定在波はよく調べられているエネルギー最小な定在波と一般には異なるため, 変分法的な議論だけでは安定性を示すことは難しい. また, 線状定在波は横方向に減衰しない解であるため, よく知られている $\mathbb{R}^N$ の定在波に比べ, 線形化作用素の性質は悪くなる.

Rousset–Tzvetkov'08 による先行結果の議論では非線形項が Fréchet 微分の意味で滑らかさを仮定しており, 滑らかでない非線形項をもつ (2NLS) には適用できないものであった. 非線形項がなめらかであれば方程式の解の特異性を扱いやすいが, なめらかでないときは解の特異性にあたる高周波部分をうまく扱う必要があった. 本研究において, 方程式の変分構造と不安定化する解の性質を用いることで, 問題である解の高周波部分の評価を得て, 周期が臨界周期以外のときの線状定在波の安定性と不安定性を決定した.

(ii) 臨界周期における非線形 Schrödinger 方程式の線状定在波の安定性の研究

横方向不安定性が起きた (2NLS) や先行結果などの場合は, 臨界周期と呼ばれる周期が存在して, 横方向 $\mathbb{T}_L$ の周期が臨界周期より真に小さいときは線状定在波は安定であり, 真に大きいときは不安定であることが知られている. 臨界周期においては, 線状定在波が定在波として分岐しており, その分岐によって線状定在波周りの線形化作用素が退化している. この線形化作用素の退化は Comech–Pelinovsky'03 などの先行結果で扱われている退化と異なり, 定常方程式の線形化作用素が退化している. Comech–Pelinovsky'03 の結果では方程式の対称性からくる振動数というパラメーターに関する線形化作用素の退化を扱っており, 定在波の分岐による退化は扱えない. さらに, 安定性を示す際に用いるリャプノフ関数が退化している方向について 3 次の項まで退化しているため, Ohta'11 の分岐する定在波の安定性に対する議論は適用できない. このため, 安定性・不安定性を示すことが困難であった.

本研究では, 臨界周期の安定性について, 非線形項 $|u|^{p-1}u$ を持つ Schrödinger 方程式の線状定在波を研究した. まず, 臨界周期における定在波の分岐に着目し, 分岐パラメータ方向のリャプノフ関数の 4 次の項の評価をした. これにより, 線形化作用素の退化を分岐の情報を用いて補うことができ, 臨界周期における線状定在波の安定性が非線形項の指数 p によって変化することを示した.

さらに, 非線形項 $|u|^{p-1}u$ と線形ポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式の線状定在波の安定性について考察した. 線形ポテンシャルがない場合は, 臨界周期において線状定在波の安定性を決定するために, リャプノフ関数の 4 次の項を計算していた. この際に, 非線形性を精密に計算することが困難だったため, 不等式を用いて 4 次の項を計算し, 指数 p に対する安定性と不安定性の境目の臨界指数を決定できなかった. 線形ポテンシャルを持つ時は小さな線状定在波を扱うことができる. そのため, 十分小さな線状定在波に関しては, 非線形項による相互作用が弱まり, リャプノフ関数の 4 次の項を計算できた. これにより, 臨界周期における小さな線状定在波については, 安定性と不安定性の境目である臨界指数 p_* を決定できた.