今後の研究計画

Hessenberg variety の幾何，表現論，可積分系

旗多様体の代数的部分集合の中で特に重要なものとして，幾何学的表現論で研究されてきた「Springer variety」や，旗多様体の量子コホモロジー環の研究において現れる「Peterson variety」，ルート系とトーリック幾何の繋がりを提供する「ルート系に付随するトーリック多様体」などがあるが，これらを統一的に記述する空間が Hessenberg variety である．詳細は省くが，A_n 型の場合は $n \times n$ 行列とある条件を満たす関数 $h : [n] \to [n]$ の組から定義される．

- **Hessenberg variety のコホモロジー環と対称群の表現**

（枡田幹也氏，佐藤敬志氏，堀口達也氏との共同研究）

Brosnan-Chow による研究により，regular matrix から定まる Hessenberg variety の族を考察することは特に面白く，またそのコホモロジーの研究は対称群の表現を通じて regular semisimple Hessenberg variety のコホモロジーと関連があることがわかってきた．本研究では同変コホモロジーの理論を用いて regualr Hessenberg variety のコホモロジー環の生成元や基底などを調べている．

- **Hessenberg variety の Weyl 指標公式**

（藤田直樹氏と Jeremy Lane 氏との共同研究）

旗多様体上のトーラス同変な直線束を regular semisimple Hessenberg variety 上に制限すると，その大域切断の成す空間はトーラスの表現となり，その指標は Weyl の指標公式を自然に一般化したものにより記述される．大域切断の成す空間そのもの及びこの直線束の高次コホモロジーがいつ消滅するかについて調べている．この研究は regular semisimple Hessenberg variety 上に自然な完全可積分系が存在するかどうかという問題への第一歩目のアプローチである．

- **ルート系に付随するトーリック多様体のトポロジー**

Hessenberg variety の特別な場合として，Weyl の部屋の集まりの成す扇から定まるトーリック多様体がある．ルート系 Φ が与えられたとき，このトーリック多様体 $X(\Phi)$ を構成することができる．今，2 つのルート系 Φ_1, Φ_2 に付随するトーリック多様体 $X(\Phi_1), X(\Phi_2)$ を考えるとき，「この 2 つの空間がホモトピー同値 $X(\Phi_1) \simeq X(\Phi_2)$ ならば Φ_1 と Φ_2 は同じルート系であるか」という問題を解決したい．これまでの研究で，ルート系が既約でランクが奇数ならばこの問題は肯定的であることが分かった．ランクが偶数の場合も調べたい．